حل نموذج بجروت

(807)-582

موعد شتاء 2023

طاقم الرياضيات

معهد IQ

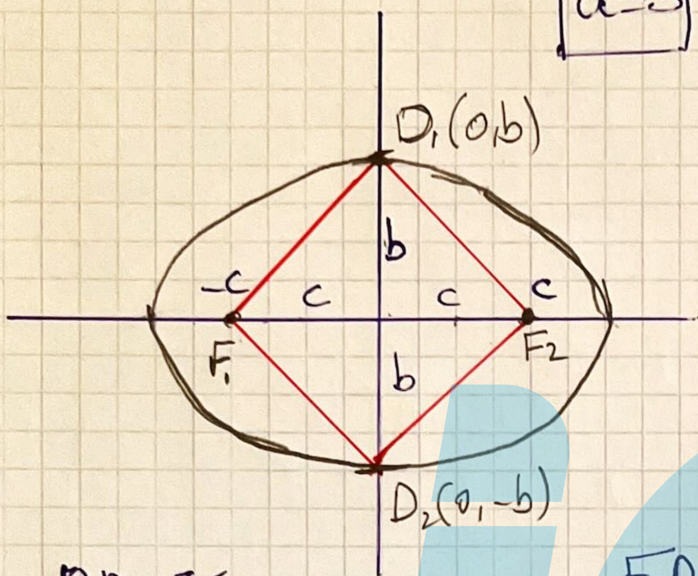
مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

سؤال 1

1.أ) معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$

اذاً $a^2=9 \leftarrow \boxed{a=3}$



احداثيات البؤرتين

$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$

واحداثيات القاطع هو

$D_1(0,b)$ $D_2(0,-b)$

بما ان الشكل الرباعي $F_1D_1F_2D_2$ هو مربع لذلك اقطاره متساويه اي يتحقق $\underbrace{2b}_{D_1D_2}=\underbrace{2c}_{F_1F_2}$

اي $\boxed{b=c}$

بحسب قاعدة بناء معادلة القطع الناقص نتحقق :

$$a^2-b^2=c^2 \xrightarrow[a=3]{b=c} 9-b^2=b^2 \rightarrow 9=2b^2$$

$$\rightarrow \frac{9}{2}=b^2 \rightarrow \sqrt{\underset{4.5}{\frac{9}{2}}}=b \rightarrow \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}=b}$$ او $\boxed{b=\sqrt{4.5}}$

2.أ) قطر المربع هو $2b= \leftarrow 2b=\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} \leftarrow 2b=3\sqrt{2}$

مساحة المربع $=\frac{(\text{القطر})^2}{2} \longrightarrow \frac{(3\cdot\sqrt{2})^2}{2} = \boxed{9 \text{ سم}^2}$

ب) معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4.5}=1$

E نقطة على القطع الناقص اي تُحقق معادلته.

M تقع على امتداد F_1E بحيث $EM=MF_2$

نفرض $M(x_M,y_M)$ وبحسب نتائج (أ) $F_1(-\sqrt{4.5},0)$ $F_2(\sqrt{4.5},0)$

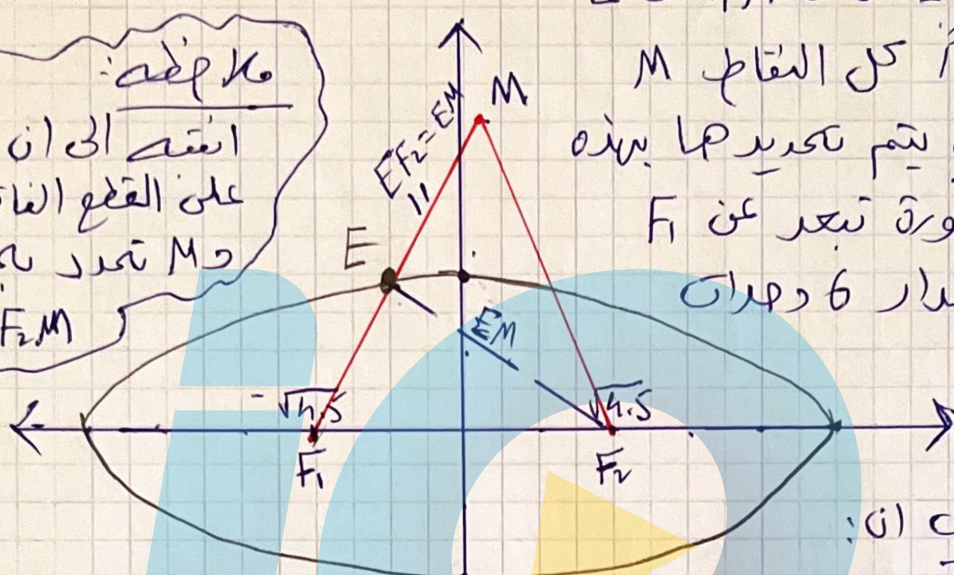
ويتحقق: $EF_1+EF_2=2a$ (بحسب بناء القطع الناقص كمحل هندسي)

اي $EF_1+EF_2=6$

وبما ان $EF_2=EM$ ⟸ $\boxed{EF_1+\overset{EF_2}{\widehat{EM}}=6}$ ⟸ $\boxed{F_1M=6}$

وبما ان $F_1M=6$ دائماً

اذاً كل النقاط M التي يتم تحديدها بهذه الصورة تبعد عن F_1 بمقدار 6 وحدات



ملاحظة:
انتبه الى ان E تتحرك على القطع الناقص و M تحدد بحيث يتحقق:
$EM=F_2M$

اي ان:
النقاط M هي المحل الهندسي الناتج من وصل كل النقاط التي بعدها عن F_1 هو 6 وحدات

وبحسب تعريف الدائرة فان النقاط M عبارة عن دائرة مركزها F_1 ونصف قطرها 6.

وبالتالي معادلتها هي:

$$(x+\sqrt{4.5})^2+(y-0)^2=\underset{36}{\cancel{b^2}}$$

ج- تحريك الدائرة من البند (ب) بمقدار $\frac{3}{\sqrt{2}}$ وحدات الى اليمين $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{4.5}\right)$ معناه حصلنا على دائرة جديدة التي تحقق:

$$\left((x-\sqrt{4.5})+\sqrt{4.5}\right)^2+y^2=36$$

$$\boxed{x^2+y^2=36}$$

وبما اننا ضربنا الاحداثي y لكل نقطة على الدائرة الجديدة بعد الازاحة بـ $\frac{2}{3}$ اذاً عملياً صغرنا الاحداثي y لكل

نقطة على الدائرة.

وبالتالي معادلة المحل الهندسي الجديد تتحقق:-

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=36$$

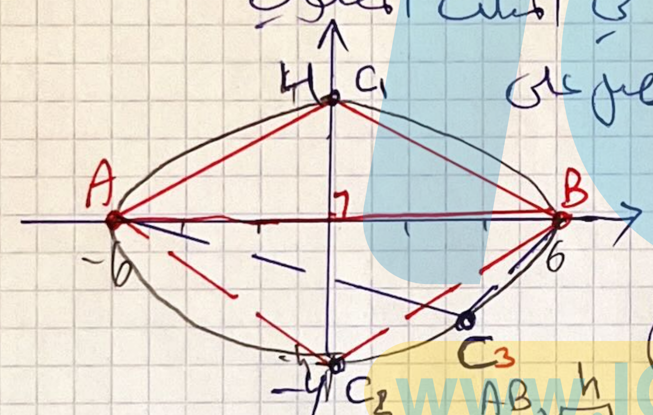
$$\Rightarrow x^2+\frac{9}{4}y^2=36 \xrightarrow{:36} \boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1}$$

وهذه المعادلة هي معادلة الـאליפסה - قطع ناقص.

ד - نقطتا تقاطع الـאליפסה مع المحور x

هي (نعوض $y=0$) ← $\frac{x^2}{36}=1$ ← $(6,0)$ $(-6,0)$

وتقاطعها مع y (نعوض $x=0$) ← $\frac{y^2}{16}=1$ ← $(4,0)$ $(-4,0)$



A وB هما رأسان ثابتان في المثلث المطلوب

وأكبر مساحة تكون عندما نحصل على أكبر ارتفاع للمثلث والنازل على القاعدة AB.

وواضح أن أكبر ارتفاع نحصل عليه في النقاط C_1 وC_2

وعندها مساحة المثلث هي: $\frac{AB\cdot h}{2}=\frac{(6+6)\cdot 4}{2} \Rightarrow \frac{12\cdot 4}{2}=24$ وحدة مساحة

انتبه! كل نقطة على القطع الناقص عدا C_1 وC_2 تعطينا مثلث ارتفاعه أصغر من 4 (انظر C_3)

سؤال 2

$$\Pi_1: (k+2)\cdot x + y + (k+1)\cdot z + 11 = 0$$ ①

$$\Pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

المتجه $\big((k+2), 1, (k+1)\big)$ عمودياً على Π_1 :

المتجه $\big((k+1), 1, 1\big)$ عمودياً على Π_2 :

وبما ان $\frac{k+2}{k+1} \neq \frac{k+1}{1} \neq \frac{1}{1}$ لذلك المستويان متقاطعان

لان المتجهات العمودية عليهما غير مرتبطة خطياً

ب ① بما أن مستقيم التقاطع للمستويين يقع على كل واحد من المستويات لذلك هو عمودياً على كل واحد من [illegible] للمستوى.

التمثيل البارامتري لمستقيم التقاطع هو l_1 ويوازي l_2

$$l_2\ \cancel{x}: (1,2,-1) + m(-1,k,k)$$

المتجه الاتجاهي ل l_1 هو نفسه المتجه الاتجاهي ل l_2 ولذلك يتحقق:

$$\text{I}\quad (-1,k,k)\big((k+2), 1, (k+1)\big) = 0$$

$$\text{II}\quad (-1,k,k)\big((k+1), 1, 1\big) = 0$$

$$\begin{cases} -1(k+2) + k + k(k+1) = 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \\ -1(k+1) + k + k = 0 \Longrightarrow \boxed{k = 1} \end{cases}$$

ب 2. $k=1$ هو حل للمعادلة الأولى أيضاً

لذلك معادلة المستويات:

$$\Pi_1: 3x + y + 2z + 11 = 0 \quad // \quad \Pi_2: 2x + y + z - 5 = 0$$

④ ← نطرح $\Pi_1 - \Pi_2$ ← $\boxed{x + z + 16 = 0}$

$x+z+16=0 \Longrightarrow x=-z-16$

نعوض $x=0$ ← $z=-16$

نجد y ← نعوض في معادلة π_2

$2x+y+z-5=0$

$2\cdot 0+y-16-5=0 \Longrightarrow \boxed{y=21}$

وبالتالي نقطة على مستقيم التقاطع هي $(0,21,-16)$

و المتجه الاتجاهي هو:

$(-1,k,k)=(-1,1,1)$

والتمثيل البارامتري:

$$\boxed{l_1: (0,21,-16)+t(-1,1,1)}$$

3. ب

الزاوية بين المستويين تحقق

$$\cos\alpha=\frac{|(3,1,2)(2,1,1)|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}$$

$$\boxed{\alpha=10.89^\circ}$$

ج. النقطة P تقع على المستوى $[yz]$ ولذلك الاحداثي x لها 0

بما أن التمثيل البارامتري لـ l_1 هو

$l_1: (0,21,-16)+t(-1,1,1)$

و P تقع على l_1 والاحداثي x لها هو 0 لذلك يجب

ان يكون $t=0$ وبالتالي P هي النقطة $P(0,21,-16)$

النقاط A و B تقع على المحور y لذلك الاحداثي x لها

هو 0 والاحداثي z ايضا 0

A تقع على π_1 ← نعوض ← $2x+y+2z+11=0$ ← $\boxed{y=-11}$

$A(0,-11,0)$

B تقع على π_2 نعوض:

$2\overset{0}{x}+y+\overset{0}{z}-5=0$

$y=5 \Longrightarrow B(0,5,0)$

$$\boxed{\text{اذاً:}\quad P(0,21,-16) \;//\; A(0,-11,0) \;//\; B(0,5,0)}$$

2.P

بما ان النقاط A و B تقعان على المحور y لذلك يمكن اعتبارهما قاعدة المثلث وعندها طول AB هو $5-(-11)=16$

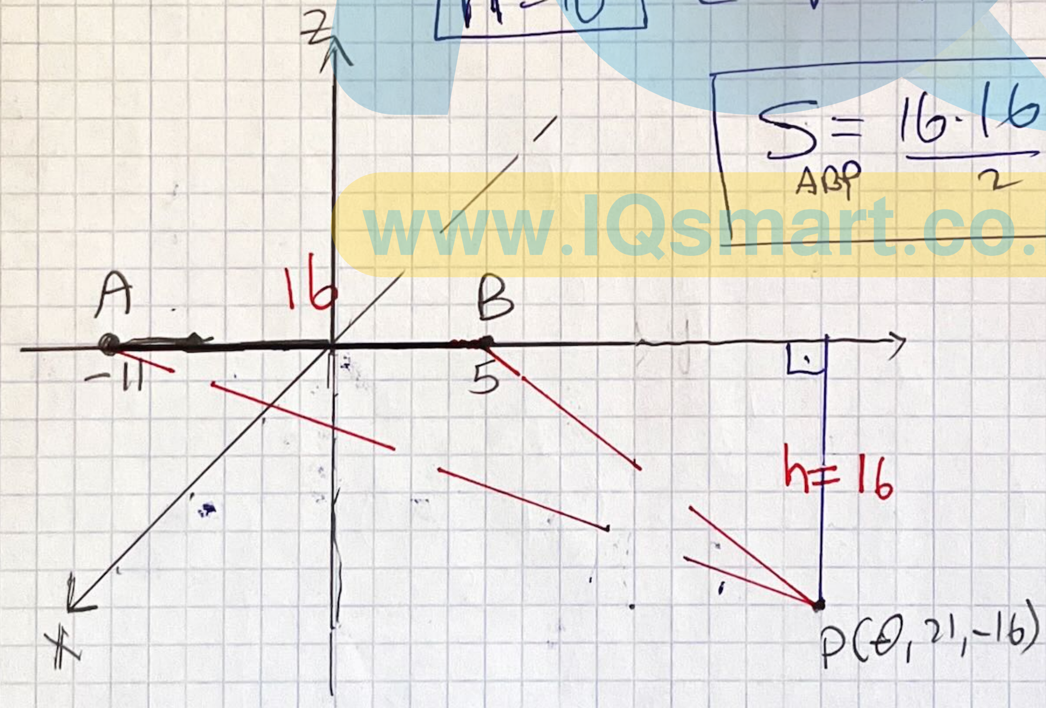
اذاً: $\boxed{AB=16}$

نجد طول الارتفاع النازل من P على AB فنجد المساحة

احداثيات P هي $P(0,21,-16)$ وبما انها تقع على المستوى $[yz]$ لذلك طول الارتفاع النازل من P على المحور y (AB) هو الاحداثي z للنقطة.

أي $h=|-16| \Rightarrow \boxed{h=16}$

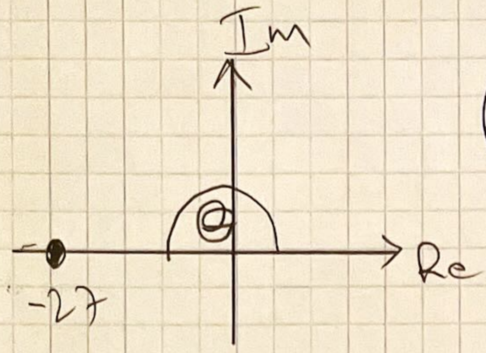
$$\boxed{S_{ABP}=\frac{16\cdot 16}{2}=128}$$



ملاحظة: يمكن حساب المساحة ايضاً بواسطة قانون sin

$$S=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BP}}{2}\cdot\sin(\angle ABP)$$

سؤال 3



أ. بالنسبة للعدد -27 $\quad (w^6=-27)$

$$R\,cis\theta=-27$$

$$\boxed{\begin{matrix}\theta=180^\circ\\ R=27\end{matrix}}$$

ونحسب قوانين دموافر.

$$w_k=\sqrt[n]{R}\cdot cis\left(\frac{\theta+360k}{n}\right) \qquad k=0,\dots,n-1$$

$$\theta=180 \qquad n=6$$

$$w_k=\sqrt[6]{27}\cdot cis\left(\frac{180}{6}+\frac{360k}{6}\right)$$

$$w_k=\sqrt[6]{27}\cdot cis(30+60k)=\sqrt{3}\cdot cis(30+60k)$$

$k=0$	$w_0=\sqrt{3}\cdot cis30=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$k=1$	$w_1=\sqrt{3}\cdot cis90=\sqrt{3}i$
$k=2$	$w_2=\sqrt{3}\cdot cis150=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$k=3$	$w_3=\sqrt{3}\cdot cis210=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$k=4$	$w_4=\sqrt{3}\, cis270=-\sqrt{3}i$
$k=5$	$w_5=\sqrt{3}\cdot cis330=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب. المعادلة II $\quad \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=w^6 \Leftarrow \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=-27$

وبالتالي الحلول تحقق:

$$\boxed{z_k=w_k-\frac{\sqrt{3}}{2}i} \Leftarrow z_k+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w_k \qquad k=0,1,\dots,5$$

$$z_0=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{3}{2} \Rightarrow z_0=\frac{3}{2}$$

$$z_1=\sqrt{3}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{3}{2} \Rightarrow z_2=-\frac{3}{2}$$

$$z_3=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}i \Rightarrow z_3=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}i$$

$$z_4=-\sqrt{3}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z_4=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_5=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{3}{2}-\sqrt{3}i \Rightarrow z_5=\frac{3}{2}-\sqrt{3}i$$

2. ب

المعادلة I $w^6=-27$

حلول هذه المعادلة عبارة عن رؤوس مضلع منتظم
حول الضلاع 6 (اي سداسي منتظم) وهذه
الرؤوس تقع على محيط دائرة مركزها (0,0)
ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ ولذلك معادلتها هي:-

$$x^2+y^2=3$$

المعادلة II $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=-27$ او $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=w^6$

وتوصلنا الى انه يتحقق:

$$z_k+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w_k \longrightarrow z_k=w_k-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

أي ان كل واحد من الحلول لمعادلة II عبارة عن ازاحه
عموديه الى الاسفل بمقدار $\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
هذه الازاحه العموديه ستحافظ على ان الشكل الناتج
هو سداسي منتظم ورؤوسه تقع على دائرة نصف قطرها
هو $R=\sqrt{3}$ ايضاً ولكن الاحداثي y للمركز اصبح:

$$y_M=0-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

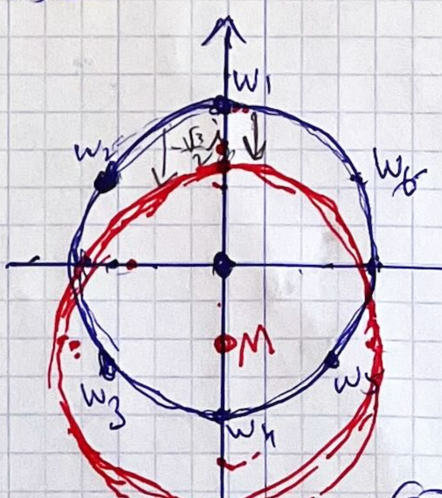
وبالتالي مركز الدائرة الجديدة اصبح:-

$$M:\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ومعادلة الدائرة الجديدة هي:

$$x^2-\left(y-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\boxed{x^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=3}$$



ج.1

الحلين الخياليين هما

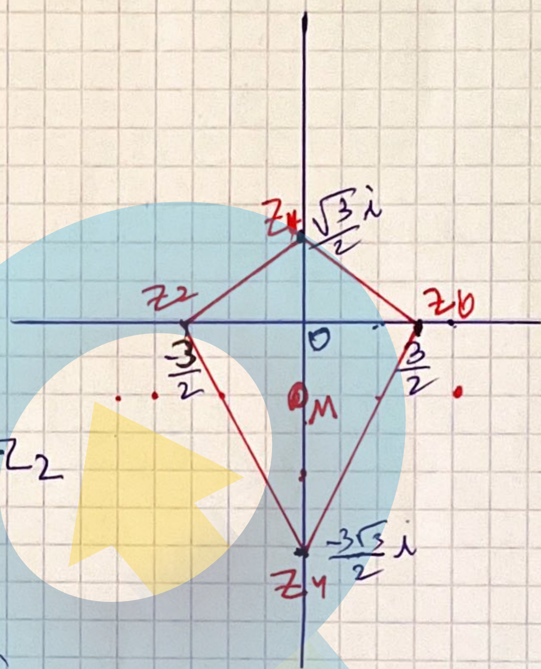
$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_4=-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

الحلين الحقيقيين هما

$z_0=\frac{3}{2}$

$z_2=-\frac{3}{2}$



الشكل الرباعي الناتج من الحلول الاربعة هو دالتون لان

$\Delta Oz_1z_0 \cong \Delta Oz_1z_2$

حسب (ض ز ض)

لذلك $z_1z_2=z_1z_0$

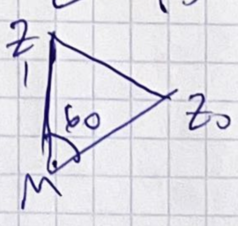
وبنفس الاسلوب:

$\Delta Oz_4z_2 \cong \Delta Oz_4z_0$

حسب (ض ز ض).

وينتج ان $z_2z_4=z_0z_4$

د. الشكل السداسي عبارة عن 6 مثلثات متساوية الاضلاع. ضلع كل واحد منهم مساوٍ ل $R=\sqrt{3}$



مساحة المثلث الواحد هي $\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 60$

اي مساحة المثلث $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ و6 مثلثات ستكون

مساحتهم $\frac{6\cdot 3\sqrt{3}}{4} \rightarrow 4.5\sqrt{3}$

الشكل الرباعي هو دالتون مساحته $\frac{\overset{2\sqrt{3}}{z_1z_4}\cdot\overset{3}{z_0z_2}}{2}=3\sqrt{3}$

والنسبة المطلوبة هي $\frac{4.5\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{3\cancel{\sqrt{3}}}=\boxed{1.5}$

سؤال 4

$$f(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-6e^{x}+5}$$

أ 1. مجال تعريف الدالة

$e^{2x}-6e^{x}+5\neq 0$

$(e^{x}-1)(e^{x}-5)\neq 0$

$e^{x}-1\neq 0$ او $e^{x}-5\neq 0$

$\boxed{x\neq 0}$ او $\boxed{x\neq \ln 5}$

اذا مجال التعريف

$\boxed{x\neq 0}$ او $\boxed{x\neq \ln 5}$

أ 2. خطوط تقارب عمودية $\boxed{x=\ln 5}$ $\boxed{x=0}$

خطوط تقارب افقية

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \longrightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \longrightarrow \frac{2e^{-\infty}}{e^{-\infty}-6e^{\infty}+5} \longrightarrow 0$$

$\boxed{y=2}$ او $\boxed{y=0}$

أ 3.

$$f'(x)=\frac{2\cdot 2e^{2x}(e^{2x}-6e^{x}+5)-2e^{2x}(2e^{2x}-6e^{x})}{(e^{2x}-6e^{x}+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot[2(e^{2x}-6e^{x}+5)-(2e^{2x}-6e^{x})]}{(e^{2x}-6e^{x}+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}[\cancel{2e^{2x}}-12e^{x}+10-\cancel{2e^{2x}}+6e^{x}]}{(e^{2x}-6e^{x}+5)^2}=\frac{2e^{2x}(-6e^{x}+10)}{(e^{2x}-6e^{x}+5)^2}$$

$f'(x)=0 \longrightarrow (-6e^{x}+10)=0 \longrightarrow 6e^{x}=10 \longrightarrow e^{x}=\frac{10}{6}$

$\boxed{x=\ln\frac{10}{6}} \longrightarrow \boxed{x=\ln\frac{5}{3}}$

نفحص المشتقة بواسطة جدول ونحدد المجالات التصاعدية والتنازلية

x	$x<0$	0	$0<x<\ln\frac{5}{3}$	$\ln\frac{5}{3}$	$\ln\frac{5}{3}<x<\ln5$	$\ln5$	$x>\ln5$
	$x=-1$		$x=\ln1.2$		$x=\ln2$		$x=\ln6$
$f'(x)$	$+$	$\}$	$+$	0	$-$	$\}$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\}$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\}$	$\searrow$

$f'(-1)=+ \;//\; f'(\ln1.2)=+ \;//\; f'(\ln2)=- \;//\; f'(\ln6)=-$

المجالات التصاعدية : $x<0$ او $0<x<\ln\frac{5}{3}$

المجالات التنازلية : $\ln\frac{5}{3}<x<\ln5$ او $x>\ln5$

ب. $g(x)=\dfrac{6e^x}{e^{2x}-6e^x+5}$

نقاط التقاطع تحقق $f(x)=g(x)$

$$\frac{2e^{2x}}{\cancel{e^{2x}-6e^x+5}}=\frac{6e^x}{\cancel{e^{2x}-6e^x+5}} \longrightarrow 2e^{2x}=6e^x$$

$$\div 2e^x \longrightarrow e^x=3 \longrightarrow \boxed{x=\ln3}$$

$$g(\ln3)=\frac{6\cdot e^{\ln3}}{e^{2\ln3}-6\cdot e^{\ln3}+5}=\frac{18}{-4}=-4.5$$

اذا نقطة تقاطع الدالتين : $\boxed{(\ln3,-4.5)}$

ج- المقام في الدالتين هو نفسه وهو: $(e^x-1)(e^x-5)$

المقام موجب في المجال $x>\ln5$ او $x<\ln1$

وسالب في المجال $\ln1<x<\ln5$

نفحص نعرف البسط في الدالتين في هذه المجالات وحسبه نقرر اي جزء تابع لأي دالة

نفحص متى يتحقق $2e^{2x} > 6e^{x} \xLeftarrow{:2e^{x}} e^{x} > 3$

$\rightarrow x > \ln 3$

اذا لكل $x > \ln 3$ البعد في $f(x)$ أكبر من البعد في $g(x)$

وبالتالي:

بما أنه في المجال $\ln 3 < x < \ln 5$ f و g سالبات

لذلك في هذه المجال يتحقق ان:

$f < g$

ومن هذا نستنتج ان الجزء 6 تابع للدالة g

والجزء 5 تابع للدالة f

في المجال $x > \ln 5 \leftarrow f > g$

وبالتالي الجزء 1 تابع لـ f والجزء 2 تابع لـ g

في المجال $x < \overset{0}{\ln 1} \leftarrow f < g$

وبالتالي الجزء 3 تابع للدالة g والجزء 4 تابع لـ f

وبالاجمال: الدالة f ← الاجزاء 1, 4, 5

الدالة g ← الاجزاء 2, 3, 6.

د. II $\int_{\ln\frac{5}{3}}^{\ln 2} (f-g)\,dx > 0$ في المجال $\ln\frac{5}{3} < x < \ln 2$ يتحقق $f > g$

وبالتالي $f(x)-g(x)>0$ والتكامل موجب

I $\int_{-5}^{-1} (f-g)\,dx < 0$ في المجال $-5 < x < -1$ يتحقق $f < g$

ولذلك $f(x)-g(x)<0$ والتكامل سالب

هـ. في المجال $\ln 6 < x < \ln 15$ الدالتين موجبتين و $f(x) > g(x)$

ولذلك المساحة هي:

$$S = \int_{\ln 6}^{\ln 15} f(x) - g(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \int_{\ln 6}^{\ln 15} \frac{\overbrace{2e^{2x}-6e^{x}}^{k'(x)}}{\underbrace{e^{2x}-6e^{x}+5}_{k(x)}}\,dx = \int_{\ln 6}^{\ln 15} \frac{k'(x)}{k(x)}\,dx = \left[\ln \overbrace{e^{2x}-6e^{x}+5}^{k(x)}\right]_{\ln 6}^{\ln 15}$$

$$= \ln\left(e^{2\ln 15} - 6e^{\ln 15} + 5\right) - \ln\left(e^{2\ln 6} - 6e^{\ln 6} + 5\right) = \boxed{3.33}$$

$\boxed{S = 3.33}$

سؤال 5

أ.1) مجال تعريف الدالة $f(x)=3x\cdot(\ln(x^2)-1)$

هو كل x يحقق $x^2>0$، وهذا يتحقق لكل $x\neq 0$

$\boxed{\text{إذا مجال التعريف هو } x\neq 0}$

أ.2) تقاطع مع x:

$0=3x\cdot(\ln(x^2)-1)$

$3x=0$ $\qquad$ $\ln(x^2)-1=0$

خارج مجال التعريف نلغي!! $\boxed{x=0}$

$\ln x^2=1$

$x^2=e \longrightarrow x=\pm\sqrt{e}$

إذا التقاطع $(\sqrt{e},0)$ $(-\sqrt{e},0)$

أ.3)

$f(-x)=3(-x)\cdot(\ln(-x)^2-1)=-3x(\ln(x)^2-1)$

$-f(x)=-3x(\ln x^2-1) \longleftrightarrow f(-x)=f(x)$

الدالة فردية

ب.1)

$f'(x)=3(\ln(x^2)-1)+3x\cdot\frac{2x}{x^2}$

$f'(x)=3(\ln x^2-1)+6=0$

$3(\ln x^2-1)=-6 \longrightarrow \ln x^2-1=-2$

$\longrightarrow \ln x^2=-1 \longrightarrow x^2=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\boxed{x_1=\sqrt{\frac{1}{e}} \qquad x_2=-\sqrt{\frac{1}{e}}}$

نفحص مع $f''(x)$

$f''(x)=3\left(\frac{2x}{x^2}-0\right)+0$

$f''(x)=\frac{6}{x} \longrightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=+ \longrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ מינימום

$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{e}}\right)=- \longrightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{e}}$ מקסימום

نجد الاحداثي y للنقاط.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2-1\right) = \frac{3}{\sqrt{e}}\cdot\left(\underbrace{\ln\frac{1}{e}}_{-1}-1\right)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{e}}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{e}}\right) = 3\left(\frac{-1}{\sqrt{e}}\right)\left(\underbrace{\ln\left(\frac{-1}{\sqrt{e}}\right)^2}_{-1}-1\right) = \frac{6}{\sqrt{e}}$$

اذن:

$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-6}{\sqrt{e}}\right)$ מינימום

$\left(\frac{-1}{\sqrt{e}}, \frac{6}{\sqrt{e}}\right)$ מקסימום

ب.2

$$f''(x) = \frac{6}{x} \neq 0$$

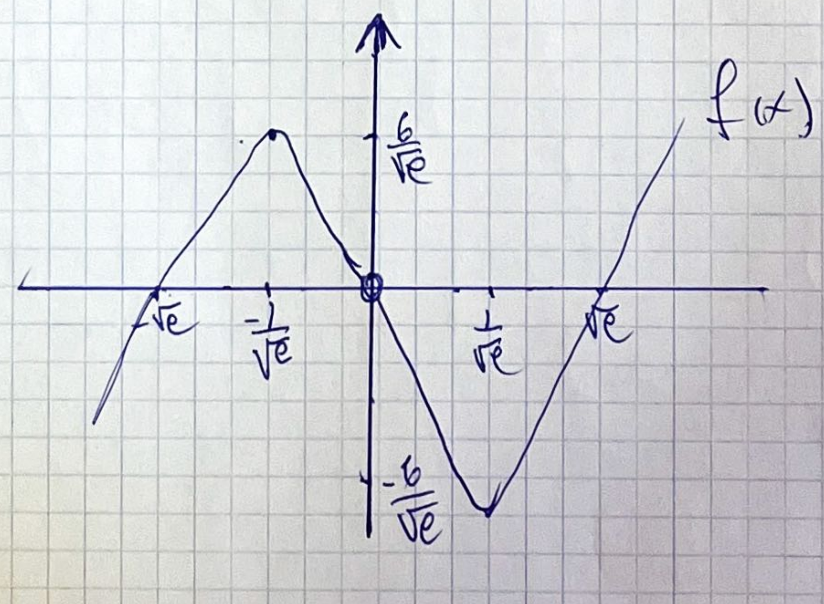
لكل x في مجال التعريف

اذن لا يوجد للدالة نقاط التواء

ب.3 لكي نرسم الدالة نفحص كيف تتصرف الدالة بجوار x=0

$f(0^+) = 3\cdot 0^+\left(\ln(0^+)^2-1\right) = 0 \Rightarrow (0,0)$ ثقب

$f(0^-) = 3\cdot 0^-\left(\ln(0^-)^2-1\right) = 0$



معطاة الدالة $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

$\boxed{1.ب}$ مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو $f(x)\neq 0$

بالإضافة للنقاط التي فيها $f(x)$ غير معرفة

فبالتالي مجال تعريف $g(x)$ هو:

$\boxed{x\neq 0 \text{ او } x\neq\sqrt{e} \text{ او } x\neq-\sqrt{e}}$

$\boxed{2.ب}$ خطوط تقارب عمودية $\boxed{x=-\sqrt{e}\quad x=0\quad x=\sqrt{e}}$

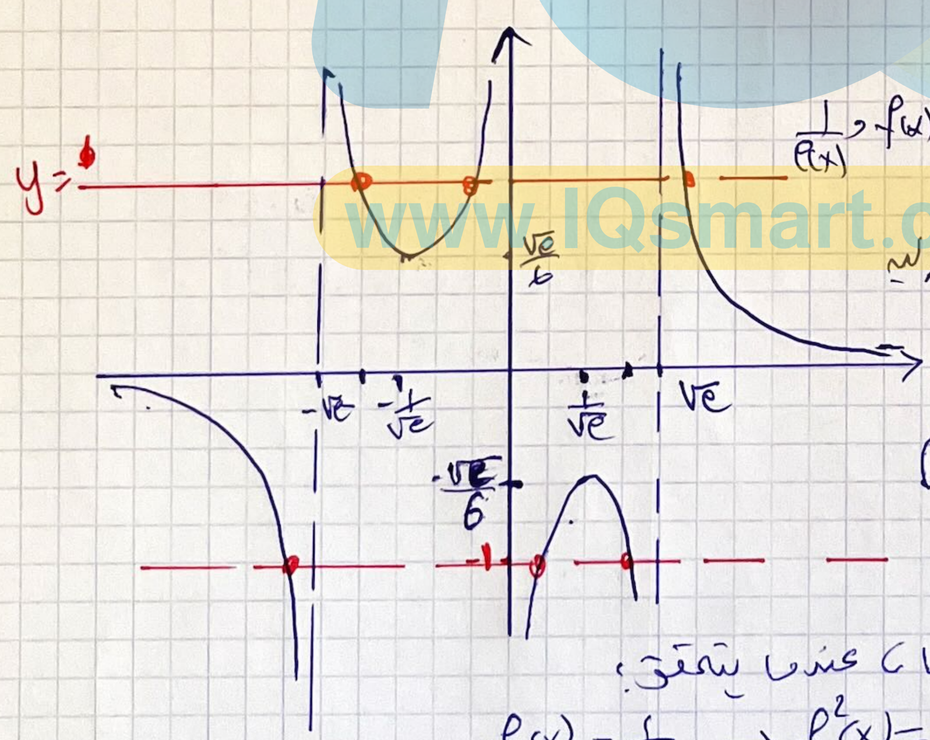
خط تقارب افقي

$x\to\pm\infty \to f(x)\to\infty$

$g(x)=\frac{1}{\infty}\to 0$

$\boxed{y=0}$ خط تقارب افقي

$\boxed{3.ب}$



نحسب العلاقة بين $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$

1. تبديل المجالات التصاعدية والتنازلية

2. تبديل نوع النقاط القصوى (اذا كانت معرفة)

★ يتقاطع الرسمان عندما يتحقق:

$f(x)=\frac{1}{f(x)} \to f^2(x)=1 \to f(x)=\pm1$

ومن خلال الرسم نرى انه المستقيم $y=1$ يقطع الرسم في 3 نقاط

والمستقيم $y=-1$ يقطع الرسم في 3 نقاط اضافية

بالمجموع 6 نقاط تقاطع

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{3x\cdot \ln x^2-1}$$:د

$$g(x)=\frac{1}{3x\cdot \ln(x^2)-1}$$

ويمكن كتابة الدالة $g(x)$ كالتالي :-

$$g(x)=\frac{\frac{1}{x}}{3\ln(x^2)-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln x^2-1}$$

نعرض الدالة $m(x)=\ln(x)^2-1$

اذا $m'(x)=\frac{1}{2x}$

وبالتالي يمكن كتابة الدالة $g(x)$ كالتالي :-

$$g(x)=\frac{1}{3}\frac{\frac{1}{2}m'(x)}{m(x)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{m'(x)}{m(x)}$$

وبالتالي

$$\int g(x)dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{m'(x)}{mx}=\frac{1}{6}\cdot\ln|m(x)|+C$$

اذا :

$$\boxed{\int g(x)\,dx=\frac{1}{6}\ln|\ln x^2-1|}$$