حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد شتاء 2023

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

سؤال 1

بحسب المعطيات:

أ. علا مشت في الدقيقة الأولى 130 متر
وفي كل دقيقة بعد الأولى مشت مسافة أقل بمترين من
المسافة في الدقيقة قبلها

أي ان طريقة مشي علا عبارة عن متوالية حسابية
حدها الأول 130 وفرقها (-2)
وبالتالي قانون الحد العام لها هو

$$a_n = 130 - 2(n-1)$$

في الدقيقة ال 55 مشت علا مسافة

$$a_{55} = 130 - 2(55-1) = 130 - 2\cdot 54 = 130 - 108$$

$$\boxed{a_{55} = 22 \text{ متر}}$$

ب. 1. نبحث عن عدد الدقائق (n) التي تعطينا مجموع 4200

أي $S_n = 4200$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$4200 = \frac{n}{2}[2\cdot 130 - 2(n-1)]$$

$$\xRightarrow{\times 2} 8400 = n[260 - 2n + 2]$$

$$\Rightarrow 8400 = n[262 - 2n] \Rightarrow 8400 = 262n - 2n^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 262n + 8400 = 0 \xRightarrow{:2} n^2 - 131n + 4200 = 0$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور دلتا

$$n_{1,2} = \frac{-(-131) \mp \sqrt{(-131)^2 - 4(1)(4200)}}{2\cdot 1} = \frac{131 \pm \sqrt{17161 - 16800}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{131 \mp \sqrt{361}}{2} = \frac{131 \mp 19}{2} =$$

$$n_1 = \frac{\overset{150}{131+19}}{2} = 75 \qquad n_2 = \frac{131-19}{2} = 56$$

حصلنا على امكانيتين لعدد الدقائق (n)
ولذلك علينا ان نفحص ايها الملائم.

ل $n=75 \longleftarrow$ $a_{75}=130-2(\underbrace{75-1}_{74})$

$a_{75}=\underbrace{130-148}_{-18}=$ مقدار سالب

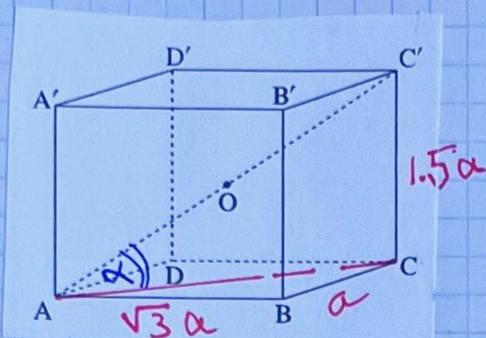
وبالتالي هذا غير ممكن لانه لا يمكن ان نمشي مسافة سالبة.

لذلك عدد الدقائق الملائم هو $\boxed{n=56}$

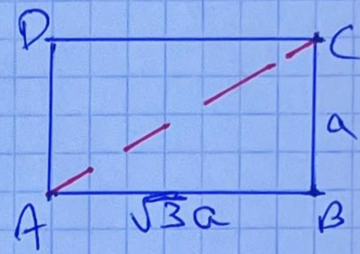
اي بعد 56 دقيقة سينتهي المسار

سؤال 2

أ. نحسب فيثاغورس



القاعدة ABCD مستطيل



ونتحقق:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = (\sqrt{3}a)^2 + a^2 \Rightarrow AC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$$

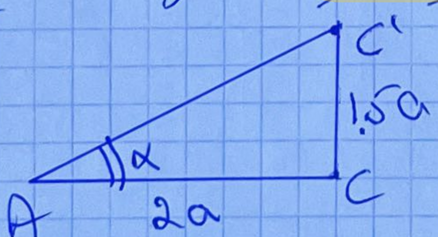
$$AC = \sqrt{4a^2} = 2a$$

$$\boxed{AC = 2a}$$

ب. الزاوية بين قطر الصندوق AC' وقطر القاعدة AC

هي الزاوية $\measuredangle C'AC$.

المثلث ACC' هو مثلث قائم الزاوية فيه الأطوال كالتالي



ونتحقق $tg\,\alpha = \frac{1.5a}{2a}$

$$tg\,\alpha = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{\alpha = 36.87}$$

ج. مساحة الغلاف = محيط القاعدة × الارتفاع

ارتفاع الصندوق هو CC' ⇐ $CC' = 1.5a$

قاعدة الصندوق ABCD ⇐ محيط القاعدة:-

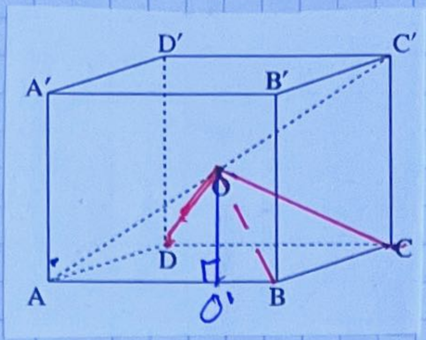
$$2\cdot(a + \sqrt{3}a) = 2a(1+\sqrt{3})$$

مساحة الغلاف $= 6 \times 108\cancel{(1+\sqrt{3})} = 1.5a(2a)\cancel{(1+\sqrt{3})}$

$$\rightarrow 108 = 3a^2 \longrightarrow 36 = a^2 \longrightarrow \boxed{a = 6}$$

ج. حجم الهرم OABCD

هو: $V = S_{ABCD} \cdot OO' \cdot \frac{1}{3}$



$OO' = \frac{1}{2} CC'$

$AB = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \cdot 6 = 6 \cdot \sqrt{3}$

$\boxed{AB = 6 \cdot \sqrt{3}}$

$BC = 1a = 6$

$\boxed{BC = 6}$

$OO' = \frac{1}{2} CC' = \frac{1}{2} (1.5) \cdot 6 = 4.5$

$\boxed{OO' = 4.5}$

$V = \frac{1}{3} AB \cdot BC \cdot OO' = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 4.5$

$\boxed{V = 54 \cdot \sqrt{3}}$

د-

1. في الهرم OAA'D'D

القاعدة هي AA'D'D وساحتها هي $\overbrace{AA'}^{9} \cdot \overbrace{AD}^{6}$

الارتفاع هو $\frac{1}{2} AB$ (العمود النازل من O على AA'D'D)

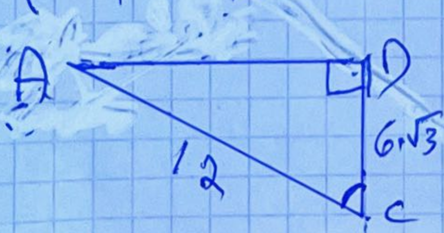
الارتفاع $= \frac{1}{2} 6 \cdot \sqrt{3} \leftarrow 3\sqrt{3}$

وبالتالي حجم الهرم هو $V = 9 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 162\sqrt{3}$

اي حجم OAA'D'D أكبر من OABCD $\boxed{\text{والادعاء صحيح}}$

2. الزاوية بين المستقيم AC (قطر القاعدة) والمستوى DD'C'C

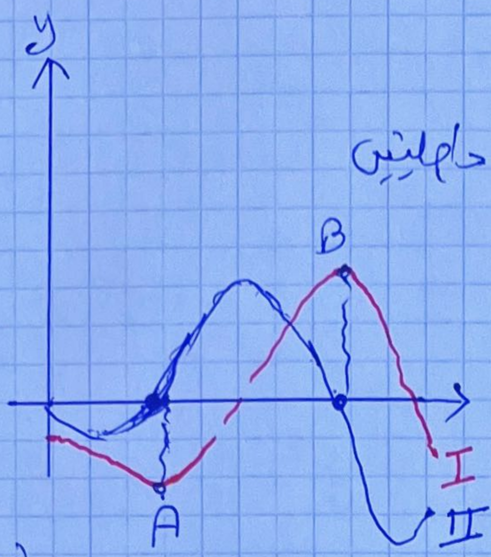
هي $\measuredangle ACD$: (مسقط A على DD'C'C هو النقطة D)



$\cos \measuredangle ACD = \frac{\overbrace{6 \cdot \sqrt{3}}^{CD}}{\underbrace{12}_{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\text{الادعاء صحيح}}$ $\boxed{\measuredangle ACD = 30}$

سؤال 3



أ- الرسم II يوجد نقطتين قصويتين داخليتين وتقطع في $x=0$ (طرف المجال).

في النقطتين القصويتين للرسم I تكون على الرسم II نقاط صفرية

كذلك بين A و B الرسم I تصاعدي ورسم II موجب

ولذلك الرسم I هو الدالة $f(x)$ والرسم II هو $f'(x)$

ب. $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos x$ $\quad 0 \le x \le 1.5\pi$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-\sin 2x)-(-\sin x)$$

$$f'(x)=-\sin 2x+\sin x$$

حسب المتطابقة ! $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$

$$f'(x)=-2\sin x\cdot\cos x+\sin x$$

$$f'(x)=\sin x[-2\cos x+1]$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow \sin x[-2\cos x+1]=0$$

$\sin x=0$

$x=\pi k$

$k=0$ $\quad \boxed{x=0}$

$k=1$ $\quad \boxed{x=\pi}$

$-2\cos x+1=0$

$1=2\cos x$

$\frac{1}{2}=\cos x$

$x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

وفي المجال المعطى فقط حل واحد $\boxed{x=\frac{\pi}{3}}$

وبالتالي هنالك 3 نقاط قصوى $\boxed{x=0 \;//\; x=\frac{\pi}{3} \;/\; \pi=x}$

نحسب رسم الدالة المعطى $x=0$ هي מקסימום طرف

$x=\frac{\pi}{3}$ ~~מינ~~מינימום מקומי

$x=\pi$ מקסימום מקומי

نجد الإحداثي y للنقاط

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\cos 0-\cos 0=-\frac{1}{2} \qquad \left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos 2\cdot\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-0.5=-0.75$$

$$\left(\frac{\pi}{3},-0.75\right)$$

$$f(\pi)=\frac{1}{2}\cos 2\cdot\pi-\cos\pi$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1-(-1)=\frac{1}{2} \qquad \left(\pi,\frac{1}{2}\right)$$

اذاً: $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ מקסימום קצה (طرف)

$\left(\frac{\pi}{3},-0.75\right)$ מינימום

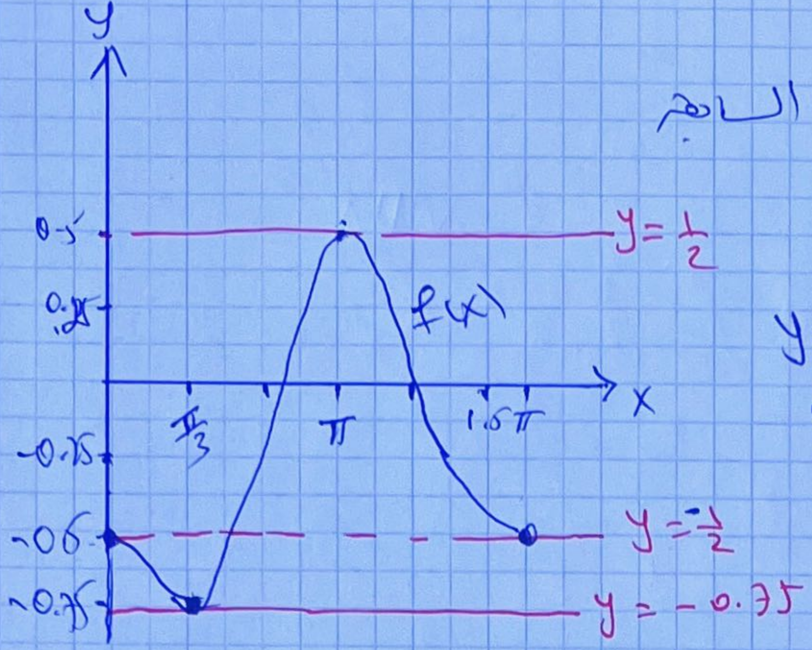
$\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$ מקסימום מוחלט

$(1.5\pi,-0.5)$ מינימום קצה

ونحسب أيضاً قيمة الدالة في طرف المجال $x=1.5\pi$ وستكون מינימום קצה

$$f(1.5\pi)=\frac{1}{2}\cos 2(1.5\pi)-\cos 1.5\pi$$

$$\frac{1}{2}(-1)-0=-\frac{1}{2}$$



ج. حسب النتائج من البنود السابقة
الرسم البياني للدالة
سيكون كما يلي
وبالتالي للمستقيم $y=k$
سيكون نقطتا تقاطع
مع الرسم بالضبط
في المجالات :

$$\boxed{-0.75 < k < -\frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}}$$

د. نقاط تقاطع $f'(x)$ مع المحور x هي

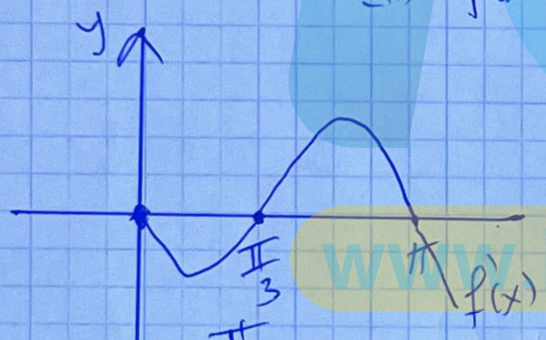
$X = 0$

$X = \frac{\pi}{3}$

$X = \pi$

في المجال $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ الدالة $f'(x)$ سالبة

في المجال $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ الدالة $f'(x)$ موجبة



لذلك المطلوب

$$S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(x)\,dx\right| + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x}$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} f'(x)\,dx\right| = \left|f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f(0)\right| = \left|\left(\frac{1}{2}\cos 2\cdot\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\cos 0 - \cos 0\right)\right|$$

$$|-0.75 - (-0.5)| = 0.25$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f'(x)\,dx = f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$0.5 - (-0.75) = 1.25$$

$$S = 0.25 + 1.25 = \boxed{1.5}$$

سؤال 4

1. أ. مجال تعريف الدالة:

$x^2-2\neq 0 \rightarrow x^2\neq 2$

$x\neq \pm\sqrt{2}$

2. أ. $\boxed{x=\sqrt{2} \text{ , } x=-\sqrt{2} \text{ خطوط عمودية}}$

أفقية:

$x\rightarrow +\infty$ لا يوجد

لأن e^{2x} أكبر من x^2 في ∞

عندما $\cancel{x\rightarrow\infty}$

$x\rightarrow -\infty \quad f(x)\longrightarrow \frac{e^{-2\infty}}{(-\infty)^2-2}\longrightarrow 0$

إذن: $y=0$ خط تقارب أفقي عندما $x\rightarrow -\infty$

ب. مع المحور x ← $y=0$ وبما ان البسط e^{2x} دائماً موجب لذلك لا يوجد تقاطع مع x

مع المحور y: ← $x=0$

$f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}}{0^2-2}=\frac{e^0}{-2}=\frac{-1}{2}$

$\boxed{y \text{ ع } (0,-\tfrac{1}{2})}$

ج. $f'(x)=0$ ← نقاط قصوى

$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot(x^2-2)-e^{2x}(2x)}{(x^2-2)^2}$

$f'(x)=\frac{e^{2x}[2(x^2-2)-2x]}{(x^2-2)^2}=\frac{e^{2x}[2x^2-2x-4]}{(x^2-2)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}[2x^2-2x-4]}{(x^2-2)^2}=0$$

$$e^{2x}[2x^2-2x-4]=0$$

لا تساوي صفر ابداً

$$2x^2-2x-4=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$\boxed{x=2}$ او $\boxed{x=-1}$

نفحص النقاط بواسطة جدول

x	$x<-\sqrt{2}$ ($x=-2$)	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<-1$ ($x=-1.3$)	-1	$-1<x<\sqrt{2}$ ($x=0$)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x<2$ ($x=1.5$)	2	$x>2$ ($x=3$)
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

بما ان المقام في $f'(x)$ موجب دائماً و e^{2x} موجب لذلك اشارة المشتقة تعرف بحسب المركب:

$$2x^2-2x-4$$

$$f'(-2)=2(-2)^2-2(-2)-4=+$$

$$f'(-1.3)=2(-1.3)^2-2(-1.3)-4=+$$

$$f'(0)=0-0-4=-$$

$$f'(1.5)=2(1.5)^2-2(1.5)-4=-$$

$$f'(3)=2(3)^2-2\cdot3-4=+$$

$$f(-1)=\frac{e^{2\cdot(-1)}}{(-1)^2-2}=\frac{e^{-2}}{-1}=-e^{-2}$$

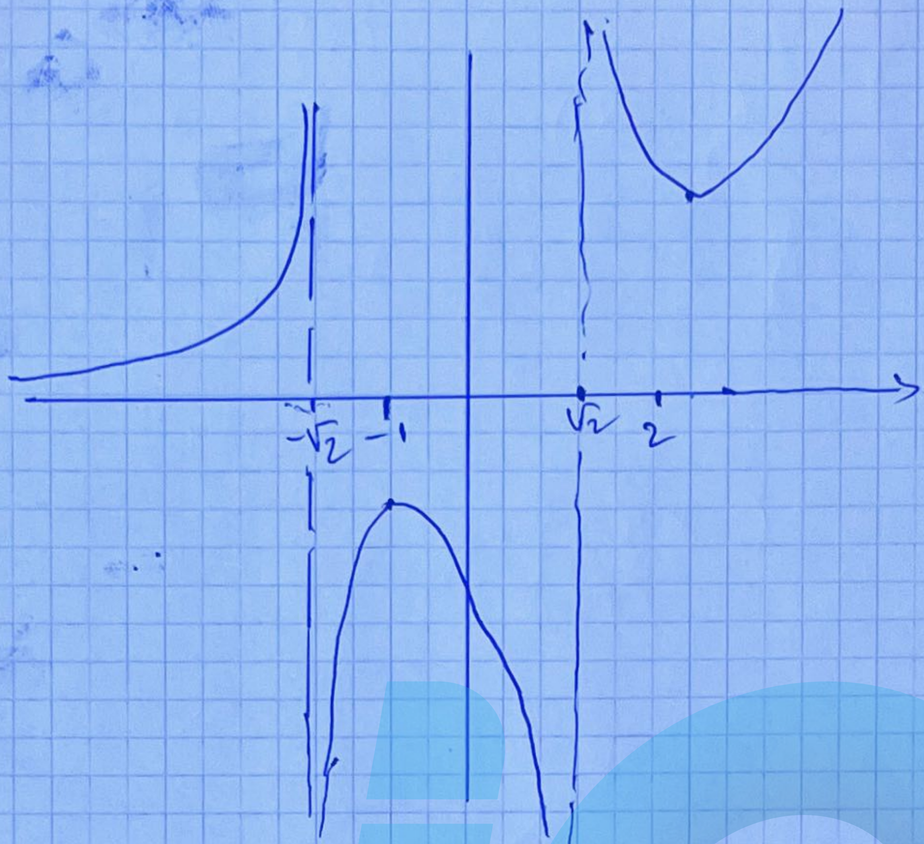
$$f(2)=\frac{e^{2\cdot2}}{2^2-2}=\frac{e^4}{2}$$

اذن:

$(-1,-e^{-2})$ מינ

$\left(2,\frac{e^4}{2}\right)$ מקס

ل.



هـ $g(x)=f(x)+c$ ← $g(x)$ انزاحة عمودية لـ $f(x)$

لكي تكون $y=3$ المماس y للنقاط القصوى

فإنه هنا ممكن في الحالتين التالية:

النقطة القصوى الأولى $(-1,-e^{-2})$ ← $(-1,\overbrace{-e^{-2}+c}^{3})$

ويتحقق:

$-e^{-2}+c=3$

$\boxed{c=3+e^{-2}}$

النقطة القصوى الثانية:

$(2,\overbrace{\frac{e^4}{2}+c}^{3})$ ← $(2,\frac{e^4}{2})$

أي يتحقق $\frac{e^4}{2}+c=3$ ← $\boxed{c=3-\frac{e^4}{2}}$

سؤال 5

$$f(x) = (\ln x)^2 - a\cdot\ln x + 3$$

أ) $0 = (\ln e^3)^2 - a\cdot\ln e^3 + 3$

$0 = 3^2 - 3a + 3 = 12 - 3a$

$12 = 3a \longrightarrow \boxed{a=4}$

ب) $F(x) = (\ln x)^2 - 4\ln x + 3$

مجال التعريف $x > 0$

ج) $0 = (\ln x)^2 - 4\ln x + 3$

نفرض $t = \ln x$

$0 = t^2 - 4t + 3$

$0 = (t-3)(t-1) \longrightarrow 1 = \ln x \quad 3 = \ln x$

$\boxed{t=3}$ او $\boxed{t=1}$ $\quad \boxed{e = x} \quad \boxed{e^3 = x}$

نقاط تقاطع مع x : $(e^3, 0)$ // $(e, 0)$

د) النقطة القصوى لـ $f(x)$ هي $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2(\ln x)\frac{1}{x} - 4\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{2\ln x - 4}{x} = 0$

$2\ln x - 4 = 0 \Longrightarrow 2\ln x = 4$

$\ln x = 2 \Longrightarrow \boxed{x = e^2}$

نفحص النقاط بواسطة جدول

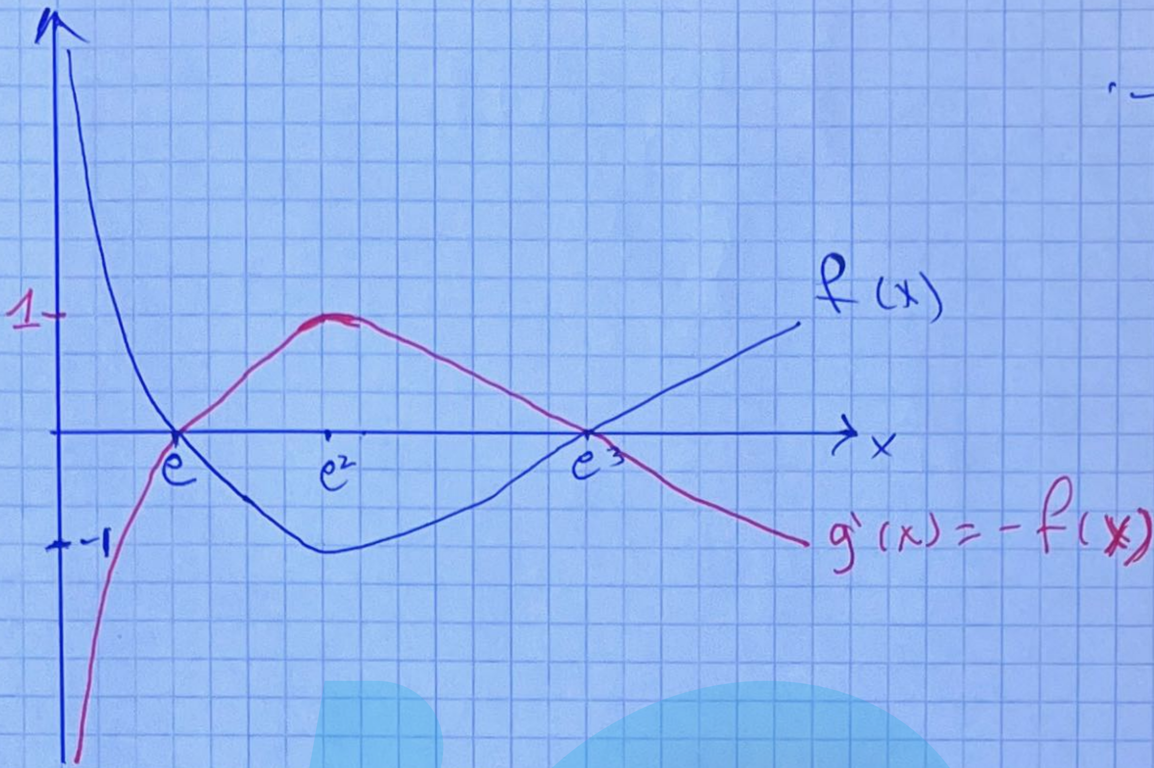
x	0	e	e^2	e^3
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$f'(e) = \frac{2\ln e - 4}{e} < 0$

$f'(e^3) = \frac{2\ln e^3 - 4}{e^3} > 0$

$f(e^2) = (\ln e)^2 - 4\ln e + 3 = -1 \quad \boxed{(e^2, -1)\ \min}$

ه.



و. $g'(x) = -f(x) \Leftarrow$ نرسم $-f(x)$ في نفس هيئة المحاور

نبني جدول يُعبر عن المجالات الموجبة والسالبة لـ $g'(x)$

x	$0<x<e$	e	$e<x<e^3$	e^3	$x>e^3$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

اذًا $x=e$ מינימום لـ $g(x)$

$x=e^3$ מקסימום لـ $g(x)$