حل نموذج بجروت

(804)-481

موعد شتاء 2023

طاقم الرياضيات

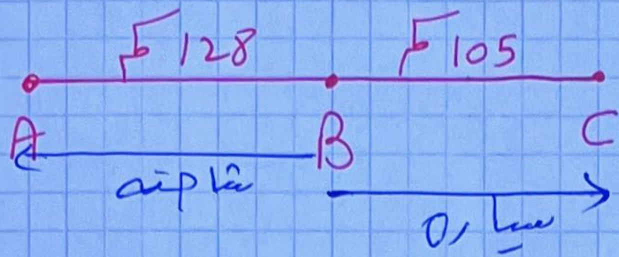
معهد IQ

مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

سؤال 1

بحسب المعطيات:



سرعة السيارة أكبر

بـ 20 كم من سرعة الشاحنة.

لذلك:

نفرض سرعة الشاحنة V كم/س

اذاً سرعة السيارة V+20 كم/س.

زمن السيارة من B الى C هو $\frac{105}{V+20}$ (ساعة)

زمن الشاحنة من B الى A هو $\frac{128}{V}$ (ساعة)

بحسب المعطى:

السيارة وصلت الى C ← (زمن السير $\frac{105}{V+20}$)

ارتاحت $\frac{1}{4}$ ساعة

السيارة تابعت السير بنفس السرعة (V+20) وعندما وصلت الشاحنة الى A كانت السيارة على بعد 42 كم من C.

C B 42 كم

اي سارت مسافة 42 كم مع المدة الزمنية التي سارتها السيارة في طريق العودة هو $\frac{42}{V+20}$

وبالتالي نتحقق:

زمن السيارة الكلي = زمن الشاحنة

$$\frac{128}{V} = \frac{105}{V+20} + \frac{1}{4} + \frac{42}{V+20} = \frac{147}{V+20} + \frac{1}{4}$$

نضرب كل المعادلة بـ $4.V.(V+20)$ نحصل على:

←

$$4V(V+20)\Big/\frac{128}{V} = \frac{147}{V+20} + \frac{1}{4}\Big/4V\cdot(V+20)$$

$$\frac{512\cancel{V}(V+20)}{\cancel{V}} = \frac{588\cdot V\cancel{(V+20)}}{\cancel{V+20}} + \frac{\cancel{4}V(V+20)}{\cancel{4}}$$

$$512V+10240 = 588V+V^2+20V$$

$$512V+10240 = V^2+608V \Rightarrow V^2+608V-512V-10240=0$$

$$\Rightarrow \boxed{V^2+96V-10240=0}$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور ونحصل على:

$V_2=-160$ و $V_1=64$

الحل ملغي لان السرعة موجبة

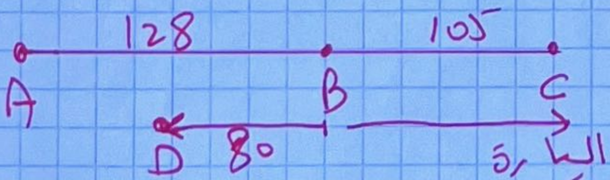
اذاً سرعة الشاحنة $V=64$ كم/س

وسرعة السيارة $V+20 \Leftarrow$ 84 كم/س

ب- عندما وصلت السيارة الى C قطعت مسافة 105 كم

بسرعة 84 كم/س لذلك الزمن هو $\frac{105}{84}=1.25$ ساعة

خلال $1\frac{1}{4}$ ساعة تقطع الشاحنة مسافة $=64\cdot1.25=80$ كم.



عندما وصلت السيارة الى C كانت الشاحنه في النقطه D وعلى بعد 80 كم عن B ولذلك الشاحنه كانت على بعد:

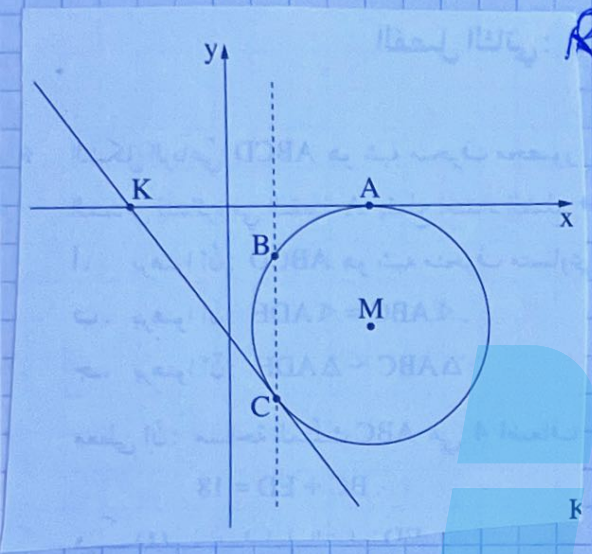
$$\boxed{128-80=48}$$
كم عن A

سؤال 2

بحسب المعطيات:

الدائرة التي مركزها M تمس المحور X.

نقطة التماس هي $A(12,0)$ و $R=10$



أ.1 بما ان $R=10$ و $AM=R$

اذًا $AM=10$.

النقطة A و M نفس ال X

لذلك $y_A - y_M = 10$

$0 - y_M = 10 \rightarrow \boxed{y_M = -10}$

$M(12,-10)$

أ.2 معادلة الدائرة:

$$(x-12)^2+(y+10)^2=10^2$$

$$\boxed{(x-12)^2+(y+10)^2=100}$$

ب. نعوض $x=4$ في معادلة الدائرة ونحصل على

$$(\underbrace{4-12}_{-8})^2+(y+10)^2=100 \Rightarrow 64+(y+10)^2=100$$

$$\Rightarrow (y+10)^2=100-64 \rightarrow (y+10)^2=36$$

$$\Rightarrow \sqrt{(y+10)^2}=\pm\sqrt{36} \Rightarrow (y+10)=\pm 6$$

$(y+10)=6$ أو $(y+10)=-6$

$y+10=6$ أو $y=-6-10$

$\boxed{y=-4}$ أو $\boxed{y=-16}$

$B: \boxed{(4,-4)}$ أو $C: \boxed{(4,-16)}$

ج- المستقيم الذي يمس الدائرة في $C:(4,-16)$ يقطع المحور x في K

أي $K(x_K,0)$

CK هو مماس للدائرة ولذلك تعامد MC

لأن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

وبالتالي ميل $CK = \frac{-1}{\text{ميل } MC}$

نجد ميل MC $C:(4,-16)$ و $M(12,-10)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-10-(-16)}{12-4} = \frac{6}{8} = +\frac{3}{4}$$

اذا ميل CK هو $\frac{-1}{+\frac{3}{4}} \longrightarrow -\frac{4}{3}$

معادلة CK من الصورة:-

$y = mx+n \qquad m = -\frac{4}{3} \qquad C:(4,-16)$

نعوض ونجد n :-

$$-16 = -\frac{4}{3}\cdot 4+n \Rightarrow -16 = -\frac{16}{3}+n$$

$$\Rightarrow -16+\frac{16}{3} = n \Rightarrow -\frac{32}{3} = n$$

اذا معادلة المماس CK هي:

$$\boxed{y = -\frac{4}{3}x - \frac{32}{3}}$$

لكي نجد احداثيات K نعوض في معادلة المستقيم $K(x_K,0)$

$$0 = -\frac{4}{3}x_K - \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}x_K = -\frac{32}{3} \Rightarrow x_K = -\frac{32}{4} = -8$$

$$\boxed{K(-8,0)}$$

د. الدائرة مركزها $K(-8,0)$ وتمس المستقيم $x=4$

وبالتالي نقطة التماس هي نقطة التي الاحداثي y لها

هو نفس الاحداثي للنقطة K اي $(4,0)$.

وبالتالي نصف القطر هو $R=4-(-8)=12$

ومعادلة الدائرة ستكون

$$(x-(-8))^2+(y-0)^2=12^2$$

$$\boxed{(x+8)^2+y^2=144}$$

هـ(1) $KM=?$, $K(-8,0)$ $M(12,-10)$

$$MK=\sqrt{(12-(-8))^2+(-10+0)^2}=\sqrt{20^2+10^2}$$

$$MK=\sqrt{400+100}=\sqrt{500} \Longrightarrow \boxed{MK=\sqrt{500}}$$

هـ(2) لكي تمس الدائرة التي مركزها M الدائرة التي مركزها

في النقطة K يجب ان تكون طول القطعة MK

مساوٍ لمجموع انصاف الاقطار، اي يجب ان يتحقق:

$$R_K+R_M=MK$$

$$12+10 \stackrel{?}{=} \sqrt{500}$$

$$22 \neq \sqrt{500}=22.36$$

وبالتالي الدائرتان غير متماستين

سؤال 3

بحسب المعطيات:

في الصندوق يوجد 18 قطعة 2 شيكل
12 قطعة 5 شيكل
6 قطع من 10 شيكل

$\overline{36}$ قطعة

أ. الاحتمال ان تكون القطعتان اللتان أخرجناهما من نفس الفئة (بدون اعادة) هو:

$$\underbrace{\frac{18}{36}\cdot\frac{17}{35}}_{\text{2 شيكل}}+\underbrace{\frac{12}{36}\cdot\frac{11}{35}}_{\text{5 شيكل}}+\underbrace{\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{36}}_{\text{10 شيكل}}=\frac{306+132+30}{36\cdot35}$$

$$\boxed{=\frac{468}{1260}=0.371}$$

ب. الاحتمال المطلوب هو الاحتمال المشروط

$$P\left(\text{مجموع القطعتين أكبر من 5}\;\middle|\;\text{أخرجنا قطعتان من نفس النوع}\right)=\frac{P\left(\text{مجموع أكبر من 5}\cap\text{نفس النوع}\right)}{P\left(\text{من نفس النوع}\right)}$$

$$=\frac{\frac{12}{36}\cdot\frac{11}{35}+\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{35}}{0.371\ \left(\frac{468}{1260}\right)}=\frac{\frac{132+30}{\cancel{1260}}}{\frac{468}{\cancel{1260}}}=\boxed{\frac{162}{468}=0.346}$$

ج- بحسب المعطيات:

اضافوا على الصندوق x قطع من فئة ١٠ شيكل

اي اصبح عدد قطع الـ ١٠ شيكل $6+x$ قطع

عدد القطع الكلي في الصندوق أصبح $36+x$

*** عدد قطع من فئة ٢ شيكل و ٥ شيكل لم تتغير.

معطى انه بعد اضافة القطع اصبح الاحتمال لاخراج قطعتين من فئة ٥ شيكل (بدون اعادة) هو $\frac{1}{15}$

اي يتحقق:-

$$\frac{12}{36+x}\cdot\frac{11}{35+x}=\frac{1}{15}$$

$$\frac{132}{1260+35x+36x+x^2}=\frac{1}{15}$$

$$\underbrace{132\cdot 15}_{1980}=1260+71x+x^2$$

$$\Longrightarrow\quad x^2+71x+1260-1980=0$$

$$x^2+71x-720=0$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور ونحصل على:

$\boxed{x=9}$ // $x=-80$ (ملغي لان x موجب)

اي اضفنا 9 قطع من فئة ١٠ شيكل

د. بعد انه أضفنا 9 قطع من فئة ١٠ شيكل فأصبح في الصندوق 18 قطعة ← ٢ شيكل // 12 ← ٥ شيكل // 15 ← ١٠ شيكل

واحتمال اخراج قطعتين من نفس الفئة بدون اعادة اصبح:-

$$\frac{18}{45}\cdot\frac{17}{44}+\frac{12}{45}\cdot\frac{11}{44}+\frac{15}{45}\cdot\frac{14}{44}=\frac{306+132+210}{45\cdot 44}$$

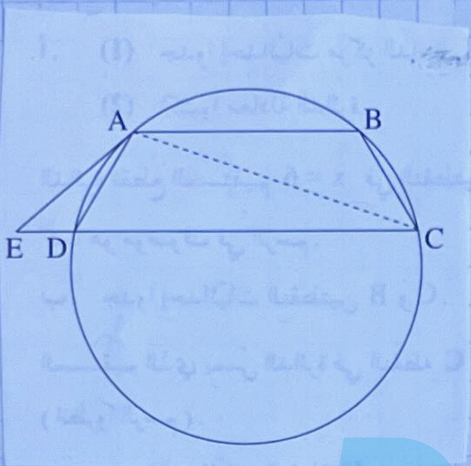
$$=\frac{648}{1980}=0.327$$

وبالتالي الاحتمال لاخراج قطعتين من نفس الفئة صغر

لان $0.327<0.371$

سؤال 4

أ- $ABCD$ شكل رباعي محصور داخل دائرة
ولذلك حاصل جمع كل زاويتين
متقابلتين هو 180°



(1) اذاً $\angle B+\angle D=180^\circ$

(2) كذلك $\angle B+\angle BCD=180^\circ$ $(AB\parallel DC)$
زوايا على نفس الجهة من
القاطع داخلية بين متوازيين

لذلك من دمج (1) و (2) نستنتج ان
$$\angle D=\angle BCD$$
وبالتالي زوايا القاعدة في شبه المنحرف $ABCD$ متساوية
أي متساوي الساقين
(وهو المطلوب (أ))

ب- $\angle B+\angle ADC=180^\circ$ زوايا متقابلة في شكل رباعي محصور داخل دائرة.

$\angle ADE+\angle ADC=180^\circ$ زاوية مستقيمة.

اذاً من دمج المعادلتين نستنتج أنّ:
$$\angle ADE=\angle ABC$$
(وهو المطلوب (ب))

ج- $\angle ADE=\angle ABC$ حسب (ب)

$\angle ACB=\angle EAD$ بحسب النظرية: الزاوية المحصورة بين مماس ووتر مساوية للمحيطية المقابلة لنفس الوتر (AD)

اذاً يتشابه المثلثان حسب (ز ز) $\triangle ABC\sim\triangle ADE$
(وهو المطلوب ج)

د. معطى ان $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ADE}$ $\Leftarrow$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=4$

بما ان النسبة بين مساحات المثلثات المتشابهة هي تربيع نسبة التشابه
ونسبة التشابه هي: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$ $\Longleftarrow$

لذلك يتحقق :

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \left(\frac{BC}{ED}\right)^2 = 4 \Longrightarrow \frac{BC}{ED} = 2$$

ومن المعطى ان $BC + ED = 15$

نفرض $BC = X \Longleftarrow ED = 15 - X$

وبالتالي يتحقق :

$$\frac{BC}{ED} = \frac{X}{15 - X} = 2$$

$$\Rightarrow X = 30 - 2X \Longrightarrow \overbrace{X + 2X}^{3X} = 30 \Longrightarrow \boxed{X = 10}$$

اذاً :

$$\boxed{BC = 10 \Longleftarrow ED = 5}$$

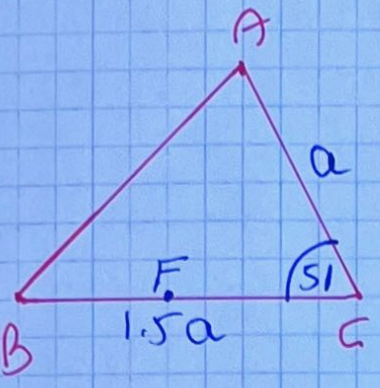
$\boxed{2.P}$ $BC = AD = 10$ لان شبه المنحرف متساوي الساقين.

حسب نسبة التشابه يتحقق :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Longrightarrow \frac{AB}{10} = 2$$

$$\boxed{AB = 2}$$

سؤال 5



أ- نفرض طول الضلع $AC=a$

اذاً $BC=1.5a$ $\quad [BC=1.5AC]$

مساحة ΔAB $= S_{\Delta ABC} = 21 = \frac{AC \cdot BC}{2} \cdot \sin(51)$

$$\Rightarrow 21 = \frac{a(1.5a)}{2} \cdot \sin(51)$$

$$\Rightarrow 42 = 1.5a^2 \cdot (0.777) \xrightarrow{2} 42 = 1.1657a^2$$

$$\Rightarrow \frac{42}{1.1657} = a^2 \Rightarrow 36.03 = a^2 \Rightarrow \boxed{6.002 = a}$$

$\boxed{BC=9}$ $\quad \boxed{AC=6}$ $\Leftarrow$ (بالتقريب) $\boxed{a=6}$

ب. بحسب قانون ال $\cos$ في المثلث ABC

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos(51)$$

$$AB^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(51)$$

$$AB^2 = 81 + 36 - 108 \cdot (0.629) = 49.033$$

$$AB^2 = 49.033 \rightarrow \boxed{AB = 7.002}$$

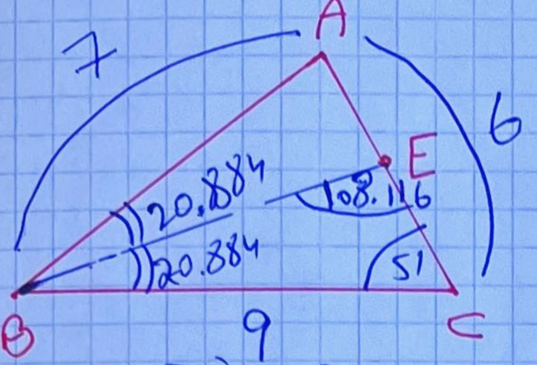
$\boxed{AB=7}$ بالتقريب

في المثلث ABC بحسب قانون ال $\sin$ يتحقق:

$$\frac{AB}{\sin 51} = \frac{AC}{\sin(\measuredangle ABC)} \Rightarrow \frac{7}{\sin 51} = \frac{6}{\sin(\measuredangle ABC)}$$

$$\Rightarrow 7\sin(\measuredangle ABC) = 6 \cdot \overset{0.777}{\sin 51} \Rightarrow$$

$$\sin(\measuredangle ABC) = \frac{6(0.777)}{7} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\measuredangle ABC = 41.768}$$



ج. في المثلث BEC يتحقق

$\angle EBC = \frac{41.768}{2} = 20.884$

$\angle BEC = 180 - 51 - 20.884$

$\angle BEC = 108.116$

وبحسب قانون ال sin في المثلث BEC يتحقق:

$$\frac{BE}{\sin 51} = \frac{BC}{\sin 108.116} \Rightarrow \frac{BE}{0.777} = \frac{9}{0.95}$$

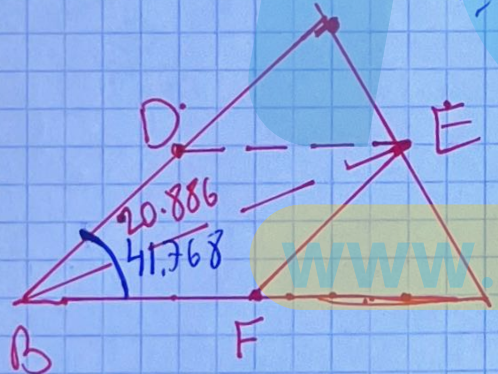
$$BE = \frac{9\cdot(0.777)}{0.95} = 7.361$$

$$\boxed{BE = 7.361}$$

د. بحسب المعطيات BDEF معيناً

BE هو قطر المعين.

اقطار المعين ينصف زوايا .

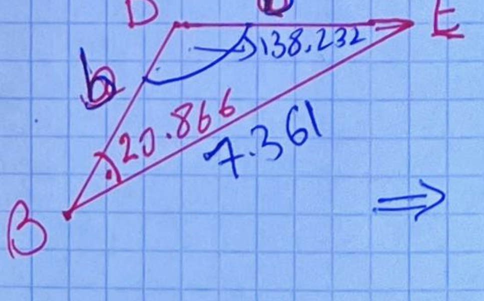


$\angle BDE = 180 - 41.768 = 138.232$

لان مجموع كل زوايتين متجاورتين في المعين هو 180°.

نفرض ضلع المعين b سم اذاً في المثلث BDE يتحقق:

بحسب قانون ال sin



$$\frac{\overset{7.361}{BE}}{\sin 138.232} = \frac{b}{\sin 20.886}$$

$$\Rightarrow 11.05 = \frac{b}{0.3565} \Rightarrow \boxed{3.94 = b}$$

سؤال 6

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+4}+a$$

أ- بما ان المقام x^2+4 موجب لكل x ولا يساوي صفر لذلك مجال التعريف هو كل x.

ب-

$$f'(x)=\frac{4(x^2+4)-2x\cdot(4x)}{(x^2+4)^2}+0$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow -4x^2+16=0 \longrightarrow 16=4x^2$$

نقسم على 4 المعادلة:

$$4=x^2 \longrightarrow \pm\sqrt{4}=x$$

$$x_1=-2 \qquad x=2$$

نفحص النقاط بواسطة جدول

	$x=-3$		$x=0$		$x=3$
x	$x<-2$	-2	$-2<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

* بما ان المقام في $f'(x)$ موجب لكل x لذلك نعوض في البسط ونفحص اشارة المشتقة

$$f'(-3)=-4(-3)^2+16=\overbrace{-36+16}^{-20}<0$$

$$f'(0)=-4\cdot 0+16=16>0$$

$$f'(3)=-4\cdot(3)^2+16=\overbrace{-36+16}^{-20}<0$$

$\Longrightarrow$ اذاً $\boxed{x=-2 \ \text{min}}$ $\boxed{x=2 \ \text{max}}$

نجد الإحداثي y للنقاط القصوى

$x=-2 \rightarrow f(-2)=\frac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}+a=\frac{-8}{\underset{8}{4+4}}+a=-1+a$

$x=2 \rightarrow f(2)=\frac{4\cdot 2}{\underset{4}{2^2}+4}+a=\frac{8}{8}+a=1+a$

اذاً: $\boxed{(-2,-1+a)}$ מינימום $\boxed{(2,1+a)}$ מקסימום

ج. بما ان نقطة النهاية الصغرى تقع على المحور X

اذاً نقطة المينيمام هي $(-2,0)$ اي يتحقق:

$f(-2)=-1+a=0 \longrightarrow \boxed{a=1}$

د. $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}+1$

خطوط تقارب عمودية لا يوجد لان الدالة معرفة لكل X

خطوط تقارب افقية

$x \to +\infty \quad y=0+1=1$

$x \to -\infty \quad y=0+1=1$

$\Longrightarrow \boxed{y=1}$

خط تقارب افقي

هـ. بما ان $a=1$ اذاً احداثيات النقاط المعقول

هي: $(-2,0)$ مينيمام $(2,2)$ مكسيمام

تقاطع مع y $x=0 \longleftarrow$

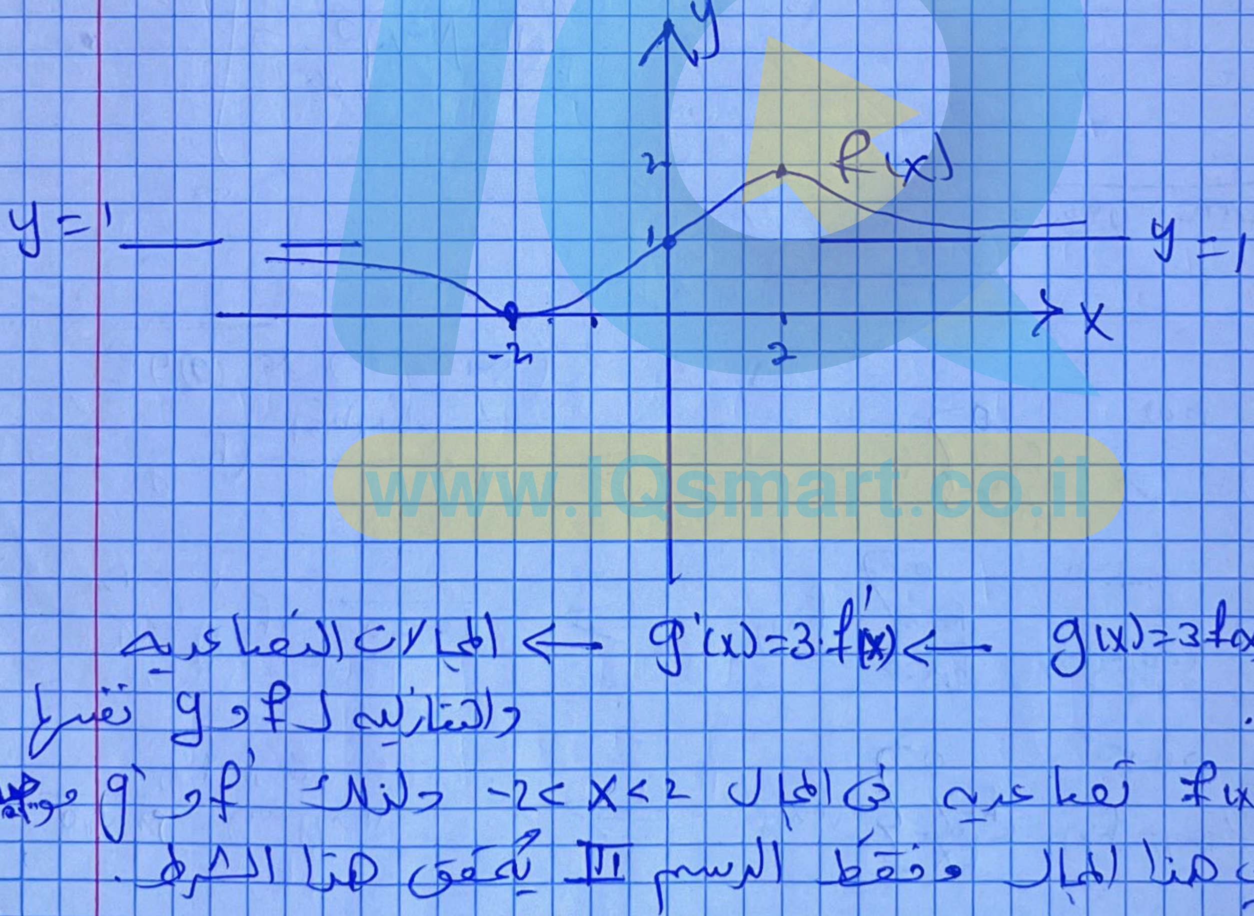
$f(0)=\frac{0}{0^2+4}+1$ $(0,1)$

تقاطع مع x $y=0 \longleftarrow$

$0=\frac{4x}{x^2+4}+1 \Rightarrow -1=\frac{4x}{x^2+4}$

$\Rightarrow -x^2-4=4x \Rightarrow x^2+4x+4=0$

$\Rightarrow (x+2)^2=0 \longrightarrow \boxed{x=-2}$ $(-2,0)$



و. $g(x)=3f(x) \longleftarrow g'(x)=3\cdot f'(x) \Leftarrow$ المجالات التصاعدية والتنازلية لـ f و g نفسها.

$f(x)$ تصاعدية في المجال $-2<x<2$ ولذلك f' و g' موجبات في هذا المجال وفقط الرسم III يحقق هذا الشرط.

ز. المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة ونحصل:

$S=\int_0^1 g'(x)\,dx=\int_0^1 3f'(x)\,dx$

$=3\left[f(x)\right]_0^1$

$$S = 3\left[\frac{4x}{x^2+4} + 1\right]_0^1 = 3\left[\left(\frac{4\cdot 1}{1^2+4}+1\right) - \left(\frac{4\cdot 0}{0^2+4}+1\right)\right]$$

$$S = 3\cdot\left[\left(\frac{4}{5}+1\right) - (0+1)\right] = 3\cdot(1.8 - 1) = 2.4$$

اذًا المساحة المحصورة بين الرسم البياني للدالة $g'(x)$
والمحورين و المستقيم $x=1$ هي

$$\boxed{S = 2.4}$$

سؤال 7

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4x+20}$$

أ- مجال تعريف الدالة $\quad 4x+20 \geq 0$

$$\Rightarrow 4x \geq -20 \Rightarrow \boxed{x \geq -5}$$

ب- تقاطع مع x $\quad y=0$

$$0 = x^2 \cdot \sqrt{4x+20}$$

$x^2 = 0 \qquad 4x+20=0$

$x=0 \qquad 4x=-20$

$\boxed{(0,0)} \qquad \boxed{x=-5} \qquad \boxed{(-5,0)}$

ج-

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{4x+20} + x^2 \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{4x+20}}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt{4x+20} + \frac{2x^2}{\sqrt{4x+20}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \sqrt{4x+20} + \frac{2x^2}{\sqrt{4x+20}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x \cdot \sqrt{4x+20} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4x+20}} \Rightarrow 2x \cdot \sqrt{4x+20} \cdot \sqrt{4x+20} = -2x^2$$

$\cdot(\sqrt{4x+20})$

$$\Rightarrow 2x(4x+20) = -2x^2 \Rightarrow 8x^2+40x = -2x^2$$

$$\Rightarrow 8x^2+2x^2+40x = 0 \Rightarrow 10x^2+40x = 0$$

$$10x(x+4) = 0$$

$10x=0$ او $x+4=0$

$\boxed{x=0} \qquad \boxed{x=-4}$

$\Rightarrow$

		$x=-4.5$		$x=-1$		$x=1$
x	-5	$-5<x<-4$	-4	$-4<x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$		$+$	0	$-$ ↘		$+$
$f(x)$	0	↗		↘		↗

$$f'(-4.5) = \overbrace{2(-4.5)}^{-9} \cdot \overbrace{\sqrt{4(-4.5)+20}}^{\sqrt{2}} + \frac{2(-4.5)^2}{\sqrt{4(-4.5)+20}} = +12.727 \ (+)$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{4(-1)+20} + \frac{2(-1)^2}{\sqrt{4(-1)+20}} = -7.5 \ (-)$$

$$f'(1) = \underbrace{2\cdot 1\cdot\sqrt{4\cdot1+20}}_{\sqrt{24}} + \frac{\overset{2}{2\cdot 1^2}}{\underbrace{\sqrt{4\cdot1+20}}_{\sqrt{24}}} = \frac{50}{\sqrt{24}} \quad (+)$$

نجد الاحداثي y للنقاط :

$f(x) = x^2\cdot\sqrt{4x+20}$

$f'(-5) = (-5)^2\cdot\sqrt{4(-5)+20} = 0$

$\boxed{\text{מינימום קצה } (-5,0)}$

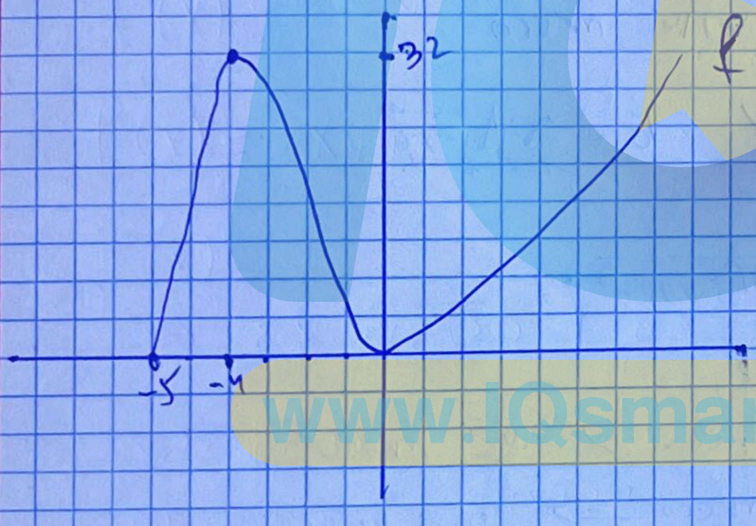
$f'(-4) = (-4)^2\cdot\sqrt{\underbrace{4(-4)}_{-16}+20} = 16\cdot\sqrt{4} = 16\cdot2 = 32$

$\boxed{\text{מקסימום } (-4,32)}$

$f'(0) = 0$

$\boxed{\text{מינימום } (0,0)}$

ד.



هـ - $g(x) = f(x) + c$ ← الدالة $g(x)$ هي ازاحة عمودية ل f

وبما ان $y=12$ يمس الدالة لذلك هنالك امكانيتين

لـ c الاولى ازاحه الى الاعلى بحيث $y=12$ يمس

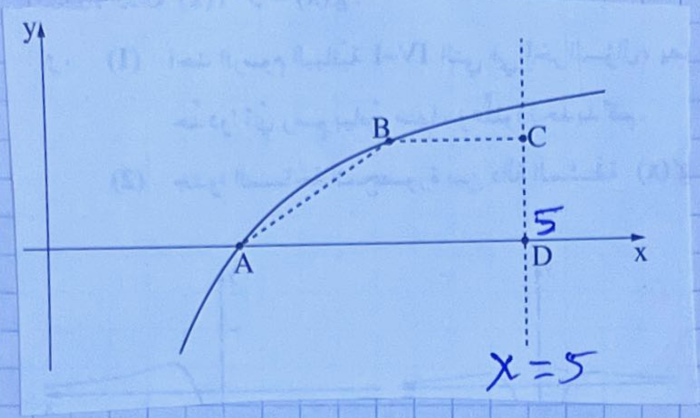
الدالة في $(0,12)$ ومقدارها $\boxed{C=12}$

او ازاحه الى اسفل بحيث $y=12$ يمس الدالة في النقطة

التي فيها $x=4$ اي تصبح النقطة المكسيموم $(-4,12)$

وبالتالي الازاحة هي 20 وحدة الى الاسفل اي $\boxed{C=-20}$

سؤال 8



$f(x)=1-\frac{2}{x} \quad x>0$

أ. النقطة A هي تقاطع الدالة $f(x)$ مع المحور x لذلك نتحقق

$f(x_A)=0=1-\frac{2}{x_A}$

$\Rightarrow \frac{2}{x_A}=1 \Rightarrow \boxed{x_A=2}$

$\boxed{A(2,0)}$

ب. النقطة B تقع على الدالة والاحداثي x لها هو t لذلك الاحداثي y لها هو $f(t)=1-\frac{2}{t}$

اذن: $\boxed{B:\left(t, 1-\frac{2}{t}\right)}$

الاحداثي x للنقطة C هو 5 والاحداثي y مساوٍ للاحداثي y للنقطة B لذلك احداثيات C هي: $C:\left(5, 1-\frac{2}{t}\right)$

ج- مساحة شبه المنحرف ABCD هي: $\frac{CD}{2}(AD+BC)$

$AD=5-2=3 \rightarrow \boxed{AD=3}$

$BC=x_C-x_B \rightarrow 5-t \Rightarrow \boxed{BC=5-t}$

$CD=y_C-y_D \rightarrow 1-\frac{2}{t}-0 \Rightarrow \boxed{CD=1-\frac{2}{t}}$

لتكن $S(t)$ دالة مساحة شبه المنحرف

$S(t)=\frac{(AB+BC)}{2}\cdot CD=\frac{(3+5-t)}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)=\frac{8-t}{2}(1-t)$

اذاً :

$$S(t) = \frac{(8-t)}{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)$$

$$S(t) = \left(4-\frac{t}{2}\right)\left(1-\frac{2}{t}\right) = 4 - \frac{8}{t} - \frac{t}{2} + 1$$

$$S(t) = 5 - \frac{t}{2} - \frac{8}{t}$$

$$S'(t) = 0 - \frac{1}{2} - 8\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{t^2}$$

$$S'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{8}{t^2} = 0 \Rightarrow \frac{8}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = \pm 4$$

بما ان $t>0$ اذاً $\boxed{t=4}$

نفحص ان $t=4$ مكسيمم بواسطة جدول جوار

t	3	4	5
$f'(t)$	+		−
$f(t)$	↗		↘

$$f'(3) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{3^2} =$$

$$f'(3) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{9} = +$$

$$f'(5) = -\frac{1}{2} + \frac{8}{5^2} = -$$

نجد احداثيات B :

$$S(4) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$B\left(4, \frac{1}{2}\right)$

د) نحسب مساحة شبه المنحرف

$$S(t) = \frac{(8-t)}{2}\left(1-\frac{2}{t}\right)$$

$$S(4) = \left(\frac{8-4}{2}\right)\left(1-\frac{2}{4}\right) = \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

اذاً $S(4)=1$ د اكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف هي 1.