حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد صيف (أ) 2023

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

$$a_n = 4n - 6$$

أ. $a_1 = 4\cdot 1 - 6 = -2 \quad \leftarrow \quad \boxed{a_1 = -2}$

ب. لكي نبرهن ان المتوالية هي متوالية حسابية يجب ان نبرهن أنّ:

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{d}_{\text{ثابت}}$$

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 6 = 4n + 4 - 6 = 4n - 2$$

$$\begin{array}{rl} a_{n+1} & = 4n - 2 \\ - \quad a_n & = 4n - 6 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 2 - (4n - 6)$$

$$a_{n+1} - a_n = -2 + 6 = 4$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = 4} \rightarrow \boxed{d = 4}$$

ج. ان المتوالية حسابية حدها الاول -2 وفرقها 4

$$S_k = \frac{k}{2}\left[2a_1 + (k-1)\cdot d\right]$$

$$S_k = \frac{k}{2}\left[2\cdot(-2) + (k-1)\cdot 4\right] = \frac{k}{2}\left[-4 + 4k - 4\right]$$

$$S_k = \frac{k}{2}\left[4k - 8\right] = \boxed{2k^2 - 4k}$$ مجموع اول k حدود

د. $$S_{2k} = \frac{\cancel{2}k}{\cancel{2}}\left[\overbrace{2\cdot(-2)}^{-4} + \overbrace{(2k-1)\cdot 4}^{+8k-4}\right] = k\left[+8k - 8\right]$$

$$\boxed{S_{2k} = 8k^2 - 8k}$$ مجموع كل حدود المتوالية $2k$

د. مجموع K الحدود الأخيرة هو مجموع كل الحدود - مجموع K الحدود الأولى.

$$\underset{\text{الأخيرة}}{S_K} = S_{2K} - \underset{\text{الأولى}}{S_K} = 7210$$

$$\underset{\text{الأخيرة}}{S_K} = 8K^2 - 8K - (2K^2 - 4K) = 7210$$

$$8K^2 - 8K - 2K^2 + 4K = 7210$$

$$6K^2 - 4K = 7210$$

$$6K^2 - 4K - 7210 = 0$$

هذه معادلة تربيعية نحلها حسب القانون ونحصل على

$K_1 = 35$ $\qquad$ $K_2 =$ سالب (مرفوض)

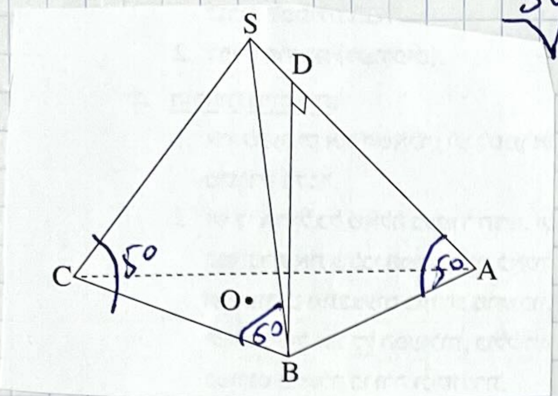
إذاً $K = 35$ عدد حدود المتوالية كلها 70

حل سؤال 2

بحسب المعطيات :

* S_{ABC} هرم قاعدته مثلث متساوي الأضلاع

* زوايا قاعدة الوجه الجانبي تساوي 50°



ننتبه الى ان الاوجه الجانبية عبارة عن مثلثات متساوية الساقين فيها زوايا القاعدة متساوية وتساوي 50.

الاوجه الجانبية هي ΔABS // ΔCBS // ΔCAS

** النقطة D على الضلع SA بحيث $BD \perp AS$

$DA=6$

1.P قاعدة الهرم عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع

نجد طول AB

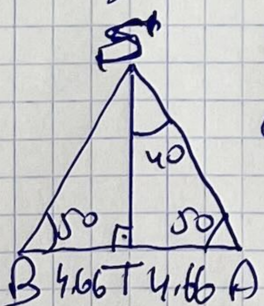
المثلث ABD قائم فيه

$AD=6$ و $\measuredangle A=50$

اذا يتحقق $\cos 50=\frac{6}{AB} \Leftarrow AB=\frac{6}{\cos 50} \rightarrow \boxed{AB=9.33}$

2.P في المثلث SAB المتساوي الساقين, زوايا القاعدة تساوي 50

وبالتالي زاوية الرأس $\measuredangle SAB=80$ $(180-50-50)$



الارتفاع النازل من S على القاعدة ينصفها وينصف

زاوية الرأس لذلك $\measuredangle TSA=40$ $BT=TA=\frac{9.33}{2}$

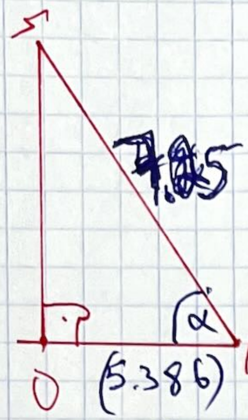
اذاً $TA=4.66$ في المثلث القائم TSA يتحقق :

$\sin 40=\frac{4.66}{SA} \Rightarrow SA=\frac{4.66}{\sin 40}=7.25$

اذاً $\boxed{SA=7.25}$ طول الضلع الجانبي

ب. SO هو ارتفاع الهرم

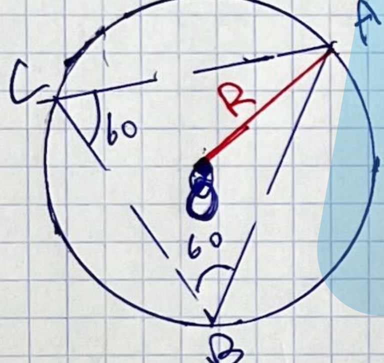
1. الزاوية بين الضلع الجانبي وقاعدة الهرم هي الزاوية المحصورة بين الضلع الجانبي ومسقطه على القاعدة.



مسقط النقطة S على القاعدة هي O
وبالتالي AO هو مسقط SA على القاعدة
والزاوية المطلوبة هي $\sphericalangle SAO$

$SA = 7.25$

بما أن القاعدة ABC مثلث متساوي الأضلاع و SO ارتفاع الهرم اذاً O هي مركز الدائرة المحيطة بالقاعدة ABC.
من هنا: OA هو نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث
وبالتالي يتحقق:



$$\frac{AB}{\sin 60} = 2R \Rightarrow \frac{9.33}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\boxed{5.386 = R}$$

وبالتالي في ΔSAO يتحقق

$$\cos \overbrace{\sphericalangle SAO}^{\alpha} = \frac{5.386}{7.25} = 42.01$$

$$\boxed{\sphericalangle SAO = 42.01}$$

ج. SO هو ارتفاع الهرم ويتحقق

$$\sin \sphericalangle SAO = \frac{SO}{SA} \Rightarrow \sin 42.01 = \frac{SO}{7.25} \Rightarrow SO = 4.86$$

$$\boxed{SO = 4.86}$$

د. احسبوا حجم الهرم:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overbrace{SO}^{h}$$

$$S_{\Delta AB} = \frac{\overset{9.33}{AB} \cdot \overset{9.33}{BC} \cdot \sin 60}{2} = 37.7$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 37.7 \cdot 4.86$$

$$\boxed{V = 61.19}$$

حل سؤال 3

نحسب المعطيات $f(x)$ و $f'(x)$ معرفات في المجال $0\le x\le \pi$

معطى دالة المشتقة :

$$f'(x) = \sin(2x) - \cos(x)$$

أ. النقاط القصوى تحقق: $f'(x)=0$

$$f'(x) = \sin 2x - \cos x = 0$$

نستعمل المطابقة $\sin 2x = 2\cos x\cdot \sin x$

$$\Rightarrow \quad 2\cos x\cdot\sin x - \cos x = 0$$

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ او $2\sin x - 1 = 0$

$\cos x = 0$ او $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ أو $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

في المجال $0\le x\le\pi$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ او $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{6}}$ او $\boxed{x_2 = \frac{5\pi}{6}}$

نبني جدول لتصنيف النقاط

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f'(x)$	طرف	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	طرف
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$f'\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{11\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0.46$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.36$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.36$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -0.46$$

اذا:

$x=0$ מקסימום קצה

$x=\frac{\pi}{6}$ מינימום

$x=\frac{\pi}{2}$ מקסימום

$x=\frac{5\pi}{6}$ מינימום

$x=\pi$ מקסימום קצה

ب- بحسب المعطى : كل نقطة من نقاط الزاوية الصغرى تقع على المحور x. اي ان الاحداثي y لها هو 0.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int \sin 2x-\cos x\,dx$$

$$f(x)=\frac{-\cos 2x}{2}-\sin x+c$$

$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ مين

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\cos\frac{2\pi}{6}}{2}-\sin\frac{\pi}{6}+c=0$$

$$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+c=0$$

$$\boxed{c=\frac{3}{4}}$$

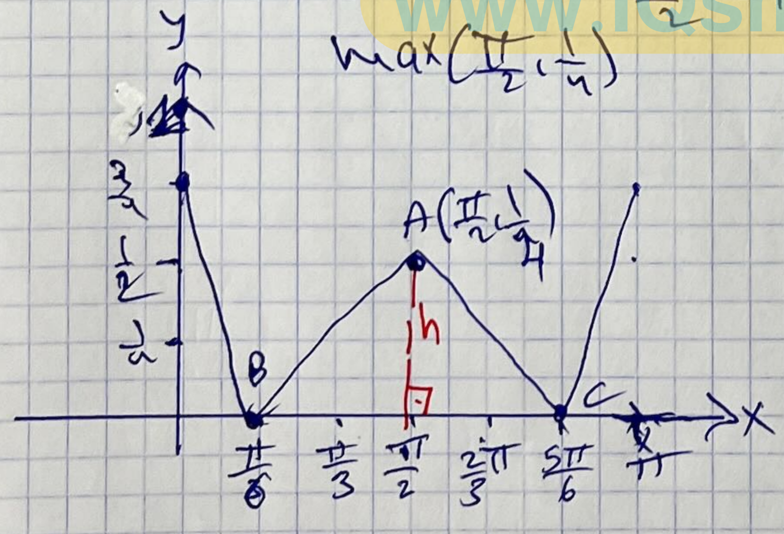
$$\boxed{f(x)=\frac{-\cos 2x}{2}-\sin x-\frac{3}{4}}$$

ج. $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\overset{-1}{\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)}}{2}-\overset{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$\max\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{4}\right)$

د.



هـ مساحة المثلث المطلوب هي مساحة ABC

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}$$

$$BC=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$$

$$BC=\frac{2}{3}\pi$$

$$h=\frac{1}{4}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}$$

حل سؤال 4

$$f(x) = e^x \cdot (e^x - 6)^2$$

أ- تقاطع مع x : $(f(x)=0)$

$$0 = e^x (e^x - 6)^2$$

$e^x = 0$ X $\qquad e^x - 6 = 0$

e^x دائماً موجب $\qquad e^x = 6 \longrightarrow \boxed{x = \ln 6}$ $\qquad \boxed{(\ln 6, 0)}$

تقاطع مع y $(x=0)$

$$f(0) = \underbrace{e^0}_{1} \underbrace{(e^0 - 6)^2}_{(1-6) = -5} = 25$$

$\boxed{(0, 25)}$

ب:
$$f(x) = e^x (e^x - 6)^2 = e^x \cdot (e^{2x} - 2 \cdot 6 \cdot e^x + 36)$$
$$f(x) = e^x (e^{2x} - 12e^x + 36) = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^x$$

$\boxed{f(x) = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^x}$ وهو المطلوب

ج- النقاط القصوى تحقق $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 12 \cdot 2e^{2x} + 36e^x$$
$$f'(x) = 3e^{3x} - 24e^{2x} + 36e^x = 0 \rightarrow 3e^x (e^{2x} - 8e^x + 12)$$
$$f'(x) = 3e^x (e^{2x} - 8e^x + 12)$$

$e^x = 0$ هذا غير ممكن او $(e^{2x} - 8e^x + 12) = 0$

$(e^x - 6)(e^x - 2) = 0$ حسب التريونوم.

$e^x = 6$ او $e^x = 2$

نقاط الشك $\boxed{x = \ln 6}$ او $\boxed{x = \ln 2}$

نصنف النقاط بواسطة جدول

x	$x<\ln 2$ ($x=0$)	$\ln 2$	$\ln 2<x<\ln 6$ ($x=1$)	$\ln 6$	$x>\ln 6$ ($x=2$)
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	0	↗

$f'(0) = 3e^{3\cdot 0} - 24e^{2\cdot 0} + 36e^{0} = 15$ $\quad x=\ln 2$ max

$f'(1) = 3e^{3\cdot 1} - 24e^{2\cdot 1} + 36e^{1} = -19.22$ $\quad x=\ln 6$ min

$f'(2) = 3\cdot e^{3\cdot 2} - 24e^{2\cdot 2} - 36\cdot e^{2} = 165.93$

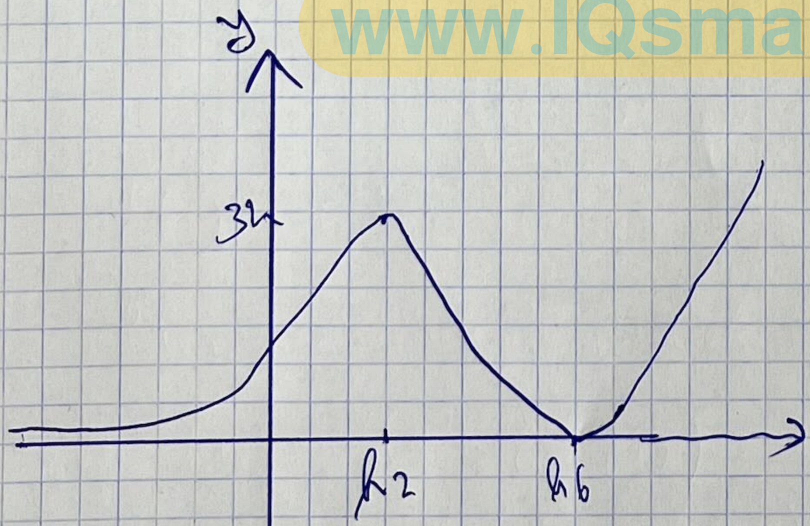
نجد الاحداثي y للنقاط القصوى

$f(\ln 6) = 0$ [illegible]

$f(\ln 2) = e^{3\ln 2} - 12e^{2\ln 2} + 36e^{\ln 2} = 32$

$(\ln 6, 0)$ min $\quad (\ln 2, 32)$ max

د. نرسم الدالة:



$\boxed{1.\text{ه}}$ $g(x)=e^{3x}$ تصاعدية دائماً موجبة لكل x

نقاط التقاء الدالتين يحقق $f(x)=g(x)$

$$\Rightarrow \cancel{e^{3x}}-12e^{2x}+36e^{x}=\cancel{e^{3x}} \rightarrow -12e^{2x}+36e^{x}=0$$

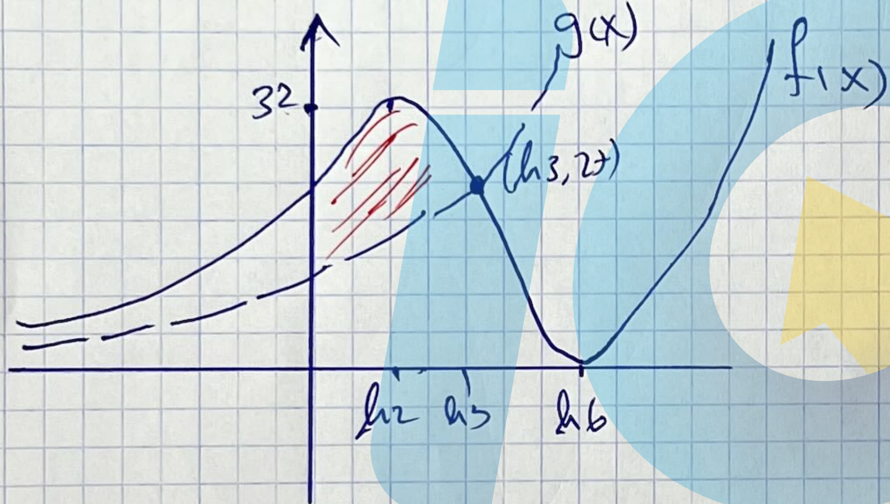
$$\Rightarrow -12e^{x}(e^{x}-3)=0$$

(دائماً سالب) ابداً $\neq 0$ $\boxed{x=\ln 3}$

نجد:

$$g(\ln 3)=e^{3\ln 3}=27$$

$(\ln 3, 27)$ نقطة تقاطع الدالتين



$\boxed{2-\text{ه}}$ المساحة المطلوبة هي المخططة وهي عبارة عن

$$\int_0^{\ln 3} f(x)-g(x)\,dx=\int_0^{3}\cancel{e^{3x}}-12e^{2x}-36e^{x}-\cancel{e^{3x}}\,dx$$

$$\int_0^{\ln 3}-12e^{2x}+36e^{x}\,dx=\left[-12\cdot\frac{e^{2x}}{2}+36e^{x}\right]_0^{\ln 3}=\left[-6e^{2x}+36e^{x}\right]_0^{\ln 3}$$

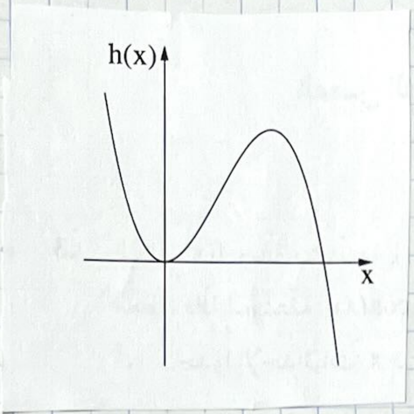
$$=\left(-6e^{2\ln 3}+36e^{\ln 3}\right)-\left(\underbrace{6\cdot e^{2\cdot 0}+36e^{0}}_{-6+36}\right)$$

$$54-30=\boxed{24}$$

وحدة مساحة

حل سؤال 5

$$h(x) = -2x^3 + 6x^2$$



أ.1 تقاطع مع x $(y=0)$

$0 = -2x^3 + 6x^2 \to 0 = -2x^2(x-3)$

$-2x^2 = 0$ أو $x-6=0$

$\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=3}$

$\boxed{(0,0)}$ // $\boxed{(3,0)}$

أ.2 الدالة موجبة في المجال $x<3$ بحيث $x\neq 0$ || $x<0$ أو $0<x<3$

الدالة سالبة في المجال $x>3$

ب. $f(x) = \ln(-2x^3+6x^2)$

نلاحظ أن الدالة $f(x) = \ln(h(x))$

أي $f(x) = \ln(h(x))$

اذاً مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو المجال الموجب لـ $h(x)$

أي $x<0$ أو $0<x<6$

ج. خطوط التقارب العامودية للمحور x هي $\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=3}$

د. نجد $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{-6x^2+12x}{-2x^3+6x^2} \to \boxed{f'(x) = \frac{-6x^2+12x}{2x^3+6x^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+12x=0 \quad -6x(x-2)=0$

$\boxed{x=2}$ ، $x=0$ مرفوض

نفحص النقط بواسطة جدول

	$x=-1$		$x=1$		$x=2.5$		$x=4$
x	$x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<3$	3	$x>3$
f'	$-$		$+$	0	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

$$f'(x)=\frac{-6x^2+12x}{2x^3+6x^2} \rightarrow$$

المقام دائماً موجب ضمن مجال التعريف لذلك إشارة المشتقة تحدد حسب إشارة البسط.

$$f'(-1)=-6(-1)^2+12(-1)=-18<0$$

$$f'(1)=-6\cdot1^2+12\cdot1=6>0$$

$$f'(2.5)=\underbrace{-6\cdot(2.5)^2}_{-37.5}+\underbrace{12(2.5)}_{25}=-12.5$$

$$f'(4)=-6\cdot4^2+12\cdot4=-48$$

$$\Rightarrow f(2)=\ln(-2(2)^3+6(2)^2)$$

$$f(2)=\ln(-16+24)$$

$$f(2)=\ln 8$$

$$\boxed{\begin{matrix}(2,\ln 8)\\ \text{max}\end{matrix}}$$

ه.

$$g(x)=-f(x)+4$$

$g'(x)=-f'(x) \longrightarrow$ لذلك المجالات التنازلية للدالة f هي تصاعدية لـ $g(x)$ والتصاعدية لـ f هي تنازلية لـ $g(x)$ $\Leftarrow$ نوع القطع يتغير

لذلك $x=2$ نقطة صغرى للدالة $g(x)$

نجد الإحداثي y لها:

$$g(2)=-f(2)+4$$

$$g(2)=-\ln 8+4$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}(2,4-\ln 8)\\ \text{min}\\ g(x)\end{matrix}}$$