حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد صيف (أ) 2023

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في هذا الموعد كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

(أ) نفرض ان عدد الكعكات التي اشتراها الطلاب هو m
إذا عدد البيتسات التي اشتراها الطلاب هو 2.5m (2.5 ضعف)

بما ان عدد البيتسات والكعكات الكلي الذي اشتراه الطلاب هو 63 لذلك يتحقق

$$2.5m + m = 63$$

$$3.5m = 63 \rightarrow m = \frac{63}{3.5} = 18$$

$\boxed{\text{اذا عدد الكعكات التي اشتراها الطلاب هو } 18}$

ب. نفرض x هو سعر الكعكة الاصلي. بما ان الطلاب حصلوا على تخفيض 16% اذا دفعوا $(100\% - 16\%) = 84\%$ من السعر الاصلي اي $\boxed{84\%x \text{ او } 0.84x}$ ثمن الكعكة.

ج. سعر البيتسا أعلى بـ 6 شيكل من الكعكة اي سعرها هو $0.84x+6$

بحسب (أ) عدد الكعكات التي اشتراها الطلاب هو 18
ولذلك عدد البيتسا هو $63-18 \Leftarrow 45$

مقابل الكعكات دفع الطلاب $18\cdot(0.84x)$
مقابل البيتسا دفع الطلاب $45(x+6)$
بالمجموع دفع الطلاب 3276 شيكل اي يتحقق:

$$18(0.84x) + 45(x+6) = 3276$$

$$15.12x + 45x + 270 = 3276$$

$$60.12x = 3276 - 270$$

$$\Rightarrow 60.12x = 3006 \rightarrow x = \frac{3006}{60.12} = 50$$

سعر الكعكة الاصلي $x = 60$ شيكل

٥. سعر البيتا هو $x+6 \Leftarrow 50+6 = 56$ شيكل

سعر الكعكة بعد التخفيض هو:

$0.84 \cdot x = 0.84 \cdot (50) = 42$ شيكل

سعر البيتا يشكل $\frac{56}{42} = 1.333$ او 133.3% من سعر الكعكة بعد التخفيض، وهذا عبارة عن 33.3% زيادة على سعر الكعكة بعد التخفيض.

$\boxed{\text{او: سعر البيتا أعلى بـ } 33.3\% \text{ او } 33\tfrac{1}{3}\% \text{ من سعر الكعكة بعد التخفيض}}$

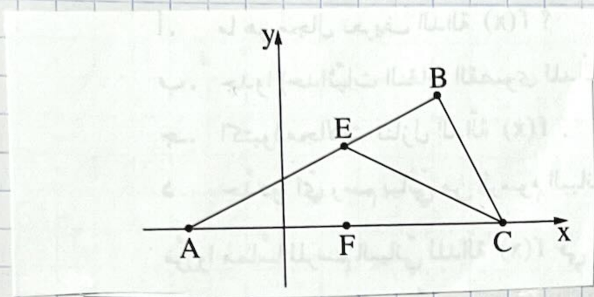
حل سؤال 2

أ.1 معطى معادلة هي AB

$AB: y=\frac{1}{2}x+3$

$B(x_B,8)$ $A(x_A,0)$

نعوض $y=0$ في المعادلة ونجد احداثيات الرأس A الذي تقع على المحور x.



$\Rightarrow \quad 0=\frac{1}{2}x+3 \xrightarrow{\times 2} -3=\frac{1}{2}x \rightarrow \boxed{-6=x_A}$

$\boxed{A(-6,0)}$

أ.2 نعوض $y=8$ في معادلة AB نحصل على

$8=\frac{1}{2}x_B+3 \Rightarrow 8-3=\frac{1}{2}x_B \Rightarrow 5=\frac{1}{2}x_B$

نضرب ب 2 $\Rightarrow \boxed{10=x_B} \Longrightarrow \boxed{B(10,8)}$

ب. معطى ان $C:(14,0)$،

نجد ميل BC ونبرهن ان (ميل BC)$\cdot$(ميل AB) $=-1$ وعندها نبرهن انهما متعامدان

$B(10,8)$ $C:(14,0) \Longrightarrow$ ميل BC $=\frac{8-0}{10-14}=\boxed{\frac{8}{-4}}=\boxed{-2}$

$\boxed{-1}=\frac{1}{2}\cdot(-2) \leftarrow$ (ميل AB)$\cdot$(ميل BC)

$\boxed{\text{اذاً AB يتعامد BC}}$

1. م معطى ان ميل EC هو $-\frac{1}{2}$

EC يمر بـ $C(14,0)$

الصورة العامة لمعادلة EC هي: $y=mx+n$

نعوض $m=-\frac{1}{2}$ واحداثيات C ونجد n.

$$0=-\frac{1}{2}\cdot 14+n \Rightarrow 0=-7+n \Rightarrow \boxed{7=n}$$

$\boxed{EC: y=-\frac{1}{2}x+7}$ معادلة

2. م E هي تقاطع المستقيمين EC و AB.

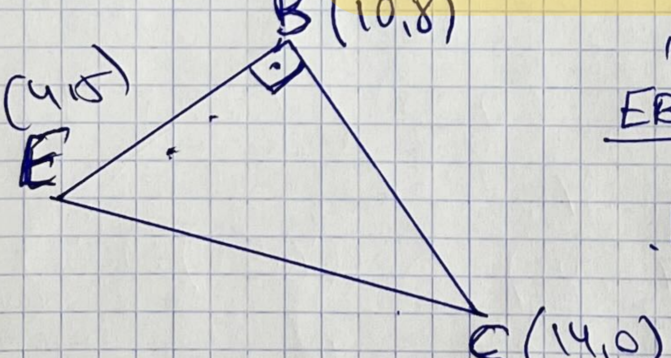
$$AB: y=\frac{1}{2}x+3$$
$$EC: y=-\frac{1}{2}x+7 \Rightarrow \frac{1}{2}x+3=-\frac{1}{2}x+7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x=7-3 \rightarrow \boxed{x=4}$$

نجد y: نعوض في واحدة من المعادلتين..

$$AB: y=\frac{1}{2}x+3 \Rightarrow y_E=\frac{1}{2}\cdot 4+3=2+3=5$$

$$\boxed{E(4,5)}$$



د. المثلث EBC قائم الزاوية

لذلك مساحته $\frac{EB\cdot BC}{2}$

نجد طول EB وطول BC.

$$EB=\sqrt{(8-5)^2+(10-4)^2}$$
$$EB=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}$$
$$\boxed{EB=\sqrt{45}}$$

$$BC=\sqrt{(10-14)^2+(8-0)^2}=\sqrt{(-4)^2+8^2}=\sqrt{16+64} \Rightarrow BC=\sqrt{80}$$

$$S_{EBC}=\frac{\sqrt{80}\cdot\sqrt{45}}{2}=\frac{60}{2}=\boxed{30}$$

ه

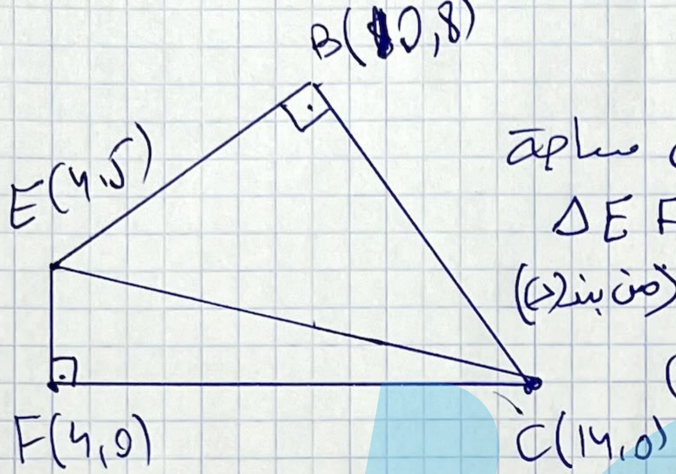
F هي نقطة على المحور X اي من الصورة $F(x_F, 0)$

EF موازي لـ y اي ان $x_F = x_E \Leftarrow E(4,5)$

$F(4,0)$

اذا الشكل الرباعي FEBC

هو كما مبين بالرسم.



مساحة FEBC عبارة عن مساحة

مثلثين: $\Delta EFC + \Delta EBC$

مساحة المثلث EBC = 30 (من بند د)

نجد مساحة EFC (القائم)

المثلث EFC قائم.

$EF = 5 - 0 = 5$

$FC = 14 - 4 = 10$

اذا مساحة المثلث $EFC = \frac{EF \cdot FC}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$

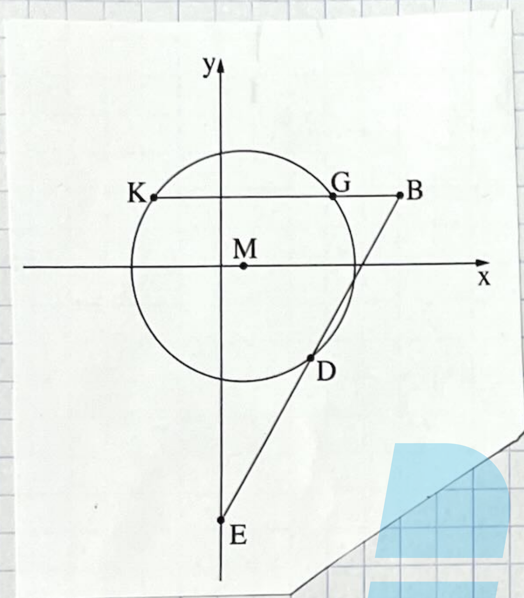
ومساحة الشكل الرباعي FEBC هي:

$25 + 30 = \boxed{55}$

حل سؤال 3

مركز الدائرة $M(2,0)$

$D(8,-8)$ تقع على محيط الدائرة.



1.أ $DM=R$ نصف قطر الدائرة

$$DM=\sqrt{(2-8)^2+(0--8)^2}$$

$$DM=\sqrt{(-6)^2+(8)^2}=\sqrt{36+64}=10$$

$$\boxed{DM=10}=R$$

2.أ معادلة الدائرة:

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=10^2$$

$$\boxed{(x-2)^2+y^2=100}$$

ب. (1) ميل المستقيم 1.75 ، المستقيم يمر بـ $D(8,-8)$

$$ED: y=mx+n \xRightarrow[m=1.75]{D(8,-8)} -8=1.75\cdot 8+n$$

$$-8=14+n \Rightarrow -8-14=n \Rightarrow \boxed{-22=n}$$

$$\boxed{ED: y=1.75x-22}$$

(2) معادلة المستقيم ED: $y=1.75x-22$ ، النقطة $E(0,y_E)$

نعوض في معادلة المستقيم $x=0$

$$\Rightarrow y_E=1.75(0)-22 \Rightarrow y_E=-22$$

$$\boxed{E(0,-22)}$$

ج- معطى أن النقطة B تقع على امتداد ED

بحيث D هي منتصف BE.

اذاً النقطة B تحقق معادلة المستقيم $BE: y=1.75x-22$

وكذلك $x_D = \frac{x_E + x_B}{2}$

$\to 8 = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow \boxed{16 = x_B}$

لكي نجد y_B نعوض في معادلة المستقيم BE

$y = 1.75x - 22$

$\boxed{x_B = 16} \Rightarrow y_B = 1.75(16) - 22$

$\Rightarrow y_B = 28 - 22 = 6$

$\boxed{B(16,6)}$

د. المستقيم الذي يوازي المحور x، ويمر بـ B

معادلته $y=6$ اي كل نقطة تقع عليه الاحداثي y

للنقطة هو 6 اذاً $G(x_G, 6)$ $K(x_K, 6)$

النقاط K و G تقع على الدائرة لذلك تحقق معادلتها

نعوض في معادلة الدائرة $\boxed{y=6}$

$(x-2)^2 + 6^2 = 100 \to (x-2)^2 + 36 = 100$

$\to (x-2)^2 = 100 - 36 \to (x-2)^2 = 64 \Rightarrow (x-2) = \pm\sqrt{64}$

$\to x - 2 = \pm 8$ $\to x - 2 = 8 \to \boxed{x = 10}$; $\to x - 2 = -8 \to \boxed{x = -6}$

بما أن الاحداثي x للنقطة K هو اصغر من G

$\boxed{\text{لذلك } \quad K(-6,6) \quad G(10,6)}$

حل سؤال 4

$$f(x) = 8 - 4x - \frac{25}{x}$$

أ. مجال تعريف الدالة $x \neq 0$

ب. النقاط القصوى تحقق $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -4 - 25\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -4 + \frac{25}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -4 + \frac{25}{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -4 + \frac{25}{x^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{25}{x^2} = 4 \Longrightarrow 25 = 4x^2 \Longrightarrow \frac{25}{4} = x^2$$

$$\Longrightarrow 6.25 = x^2 \Longrightarrow \pm\sqrt{6.25} = x \Longrightarrow \boxed{\pm 2.5 = x}$$

نفحص النقاط بواسطة جدول لتحديد نوعها

$f'(x) = -4 + \frac{25}{x^2}$

x	$x < -2.5$	-2.5	$-2.5 < x < 0$	0	$0 < x < 2.5$	2.5	$x > 2.5$
$f'(x)$	$\boxed{x=-3}$ $-$	0	$\boxed{x=-1}$ $+$		$\boxed{x=1}$ $+$	max	$\boxed{x=3}$ $-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f'(-3) = -4 + \frac{25}{(-3)^2} = -4 + \frac{25}{9} = -1.22$$

$$f'(-1) = -4 + \frac{25}{(-1)^2} = -4 + 25 = 19$$

$$f'(1) = -4 + \frac{25}{1^2} = -4 + 25 = 19$$

$$f'(-3) = -4 + \frac{25}{(-3)^2} = -4 + 2.77 = -1.22$$

$$f(-2.5) = 8 - 4(-2.5) - \frac{25}{-2.5}$$

$$f(-2.5) = 8 + 10 + 10 = 28$$

$$\boxed{(-2.5, 28) \text{ min}}$$

$$f(2.5) = 8 \underbrace{- 4(+2.5)}_{-10} \underbrace{- \frac{25}{2.5}}_{-10} = -12$$

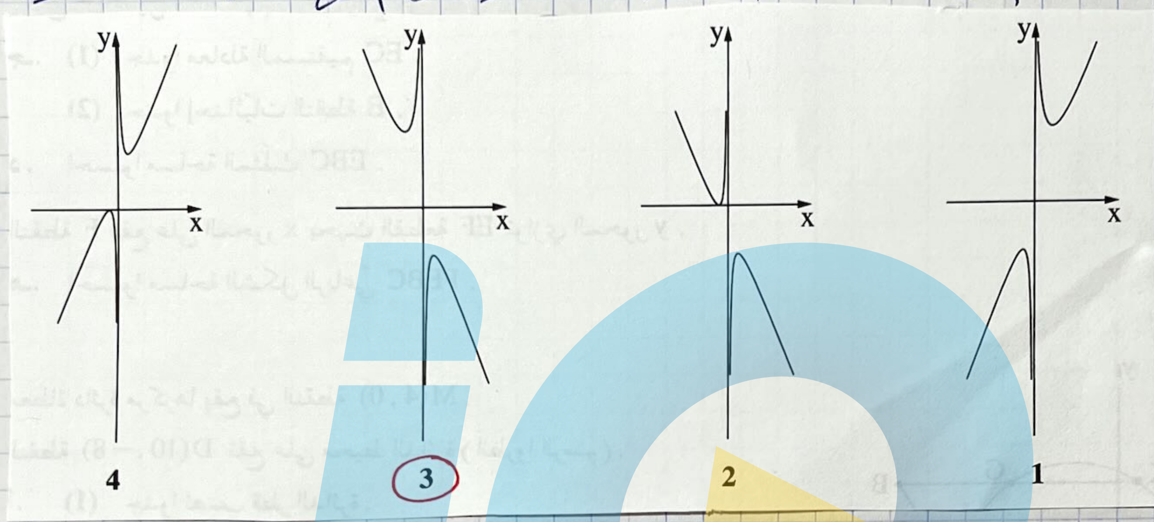
$(2.5, -12)$ max

ط. نجمع الجدول لتصنيف النقاط القصوى :-

المجالات التصاعدية : $-2.5<x<0$ أو $0<x<2.5$

المجالات التنازلية : $x<-2.5$ او $x>2.5$

ي) الرسم 3 هو رسم الدالة لأنه يتلائم مع المجالات التصاعدية والتنازلية



ك- المماس مرسوم للدالة في $x=5$.

ميل المماس هو $f'(5)=$

نقطة التماس هي $(5, f(5))$

نجد الميل ونقطة التماس

$$f'(5)=-4+\frac{25}{5^2}=-4+\frac{25}{25}=-4+1=-3$$

$$\boxed{\text{ميل المماس} = m=-3}$$

نقطة التماس:

$$f(5)=8-4\cdot(5)-\frac{25}{5}=8-20-5=-17$$

نقطة التماس: $(5,-17)$

نجد المعادلة: $y=mx+n$

$n=?$

$$-17=-3\cdot5+n \Rightarrow -17=-15+n \Rightarrow -17+15=n$$

$$\boxed{-2=n}$$

وبالتالي معادلة المماس هي $\boxed{y=-3x-2}$

حل سؤال 5

$$f(x)=x^3-12x^2+45x-50$$

أ. نجد $f'(x)$

$$f'(x)=3x^2-24x+45$$

النقاط القصوى: $f'(x)=0$

$$3x^2-24x+45=0$$

$$:3 \;/\; x^2-8x+15=0$$

$$(x-3)(x-5)=0$$ نحللها حسب هـ ذلام

$\boxed{x=3}$ أو $\boxed{x=5}$

$\boxed{\text{اذًا الاحداثي } x \text{ للنقطة } C \text{ هو } 3. \quad \text{الاحداثي } x \text{ للنقطة } B \text{ هو } 5.}$

ب. نجد ميل المماس في النقطة C اي $f'(5)=?$

ونجد ايضًا نقطة المماس اي احداثيات C: $C(5,f(5))$

نجد الميل ← نعوض $x=5$ في $f'(x)$

$$f'(x)=3x^2-24x+45 \Longrightarrow f'(5)=3\cdot5^2-24\cdot5+45$$

$$f'(5)=3\cdot25-120+45=75-120+45=0$$

ملاحظة: بما ان C هي نقطة قصوى لذلك كان من الممكن ان نعرف مباشرةً ان الميل هو 0.

نجد الاحداثي y لـ C

$$f(5)=5^3-12\cdot5+45\cdot5-50=125-60+225-50$$

$$f(5)=4 \Rightarrow \boxed{(5,4)}\,C$$

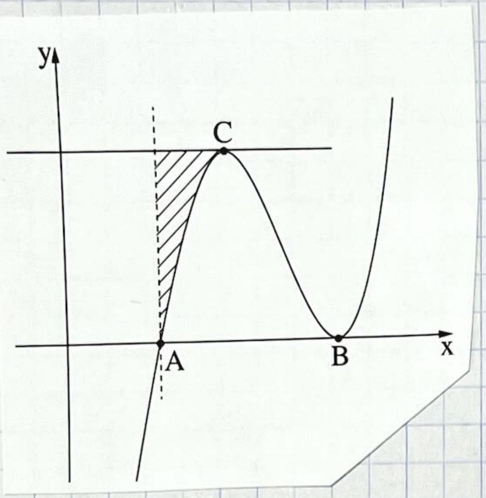
معادلة المماس $\boxed{y=4}$

4

ج. النقطة A تقع على الدالة نفحص اي واحدة منهم تحقق الدالة

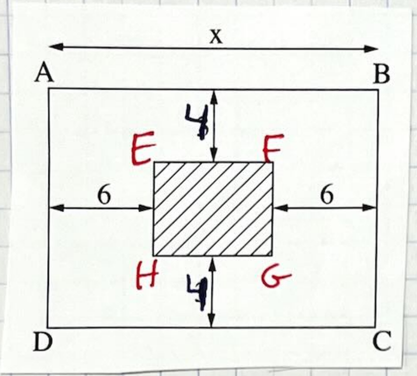
$$(2,0) \to f(2)=2^3-12\cdot2^2-45\cdot2+50=8-12\cdot2^2-90+80=8-48-90+130=0$$

اذًا $(2,0)$ تحقق الدالة. وهي A



حل سؤال 6

معطى أن المساحة على شكل مستطيل ومحيطها 140 متر



أ- x هو طول الضلع AB

لذلك $AB=DC=x$

محيط المستطيل $ABCD$ هو

$AB+DC+AD+BC$

$AD=BC$

$2x+2BC=140$

$/:2$

$x+BC=70 \Rightarrow \boxed{BC=70-x}$

ب- نرمز لرؤوس المستطيل الذي يعبر عن المنطقة العشبية بـ E, F, G, H كما مبيّن.

$EF=HG=x-6-6=x-12$

$\boxed{EF=HG=x-12}$

$EH=FG=70-x-4-4=62-x$

$\boxed{EH=FG=62-x}$

ج- مساحة المنطقة العشبية هي $EF \cdot EH$

نبني دالة تعبر عن المساحة:

$$S(x)=(x-12)(62-x) \Rightarrow S(x)=62x-744-x^2+12x$$

$$\boxed{S(x)=-x^2+74x-744}$$

حصلنا على دالة مساحة وهي عبارة عن دالة تربيعية ولذلك رأس الدالة هو نقطة المكسيمم لها وبما أن معامل x^2 سالب لذلك رأس الدالة هو مكسيمم

$x_{\text{رأس الدالة}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-74}{2(-1)} = \frac{-74}{-2} = 37$

إذن $x=37$ يعطينا أكبر مساحة

د. المساحة المخططة هي المساحة المحصورة بين الدالة والمقطع C والمستقيم $y=4$ والمستقيم $x=2$ (يمر بـ A ومعامد لمحور y)

وهذه المساحة عبارة عن (الاحداثي x لـ C)

$$\int_2^3 4-\underbrace{(x^3-12x^2+45x-50)}_{f(x)}\,dx$$

$$=\int_2^3 4-x^3+12x^2-45x+50\,dx=\int_2^3 -x^3+12x^2-45x+54\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}-45\frac{x^2}{2}+54x\right]_2^3$$

$$=\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{12\cdot 3^3}{3}-45\frac{3^2}{2}+54\cdot 3\right)-\left(-\frac{2^4}{4}+\frac{12\cdot 2^3}{3}-45\frac{2^2}{2}+54\cdot 2\right)$$

$$=47.25-46=\boxed{1.25}$$

إذاً المساحة المخططة هي 1.25 وحدة مساحة