حل نموذج بجروت

(807)-582

موعد (ب) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في موعد (ب) كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

أ- $A(-10,6)$ $B:(0,-4)$

AB هو وتر في الدائرة. العمود المتوسط للقطعة AB يمر بمركز الدائرة, أي أن مركز الدائرة يقع على العمود المتوسط للقطعة AB.

نجد منتصف AB: $N(X_M, Y_M)$

$$X_M = \frac{X_A + X_B}{2} = \frac{0-10}{2} = -5$$

$$Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$$\boxed{N:(-5,1)}$$

مراكز الدوائر تقع على العمود المتوسط لـ AB

نجد معادلته:

$$\text{ميل } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-4)}{-10-0} = \frac{10}{-10} = -1$$

العمود المتوسط يعامد AB لذلك ميله 1.

(لأن حاصل ضرب ميلي مستقيمين متعامدين هو -1)

العمود المتوسط يمر بـ $N(-5,1)$ ومعادلته من الصورة

$y = mx + n$

$$\Longrightarrow 1 = 1\cdot(-5) + n \Rightarrow 1 = -5 + n \Rightarrow \boxed{6 = n}$$

ومعادلة العمود المتوسط هي:

$$\boxed{y = x + 6} \Longrightarrow \boxed{y - x - 6 = 0}$$

ب- بما أن نقطتا التقاطع للدائرة M (التي AB هو وتر فيها) هما البؤرتان [illegible] وتقعان على المحور X, فهما من الصورة $(X_F, 0)$ $(-X_F, 0)$ لذلك هما موجودتان على بعد متساوٍ من نقطة الأصل وبما أن مركز الدائرة يقع على العمود المتوسط لـ AB لذلك

المحور y هو العمود المتوسط الذي يقع عليه مركز الدائرة M.

بما انه بحسب البند (أ) المحل الهندسي لكل مراكز الدوائر هو المستقيم $y=x+6$. إذاً نستنتج ان مركز الدائرة يقع على المستقيم $y=x+6$ ودائماً على المستقيم $x=0$ (المحور y).

أي ان مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المستقيم $x=0$ مع المستقيم $y=x+6$.

نعوض $x=0$ في المعادلة ونحصل على مركز الدائرة

$$y=0+6=6$$

إذاً مركز الدائرة هو M $\boxed{M:(0,6)}$

نصف قطر الدائرة هو MA (او MB) $B:(0,-4)$, $M:(0,6)$

$$R=MB=6-(-4)=10 \qquad \boxed{R=10}$$

إذاً للتلخيص

الدائرة M مركزها $\boxed{M:(0,6)}$

ونصف قطرها $\boxed{R=10}$

ومعادلتها $(x)^2+(y-6)^2=10^2$

ج- معادلة القطع الناقص هي من الصورة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

بحيث يتحقق: $2a$ هو طول القطر الرئيسي للقطع الناقص

$2c$ هو البعد بين البؤرتين

وما يحقق: $b^2=a^2-c^2$

بحسب المعطيات طول القطر الرئيسي مساوٍ لقطر الدائرة اي ان $2a=2\cdot 10 \Leftarrow \boxed{a=10}$

والبؤرتين هما تقاطع الدائرة مع المحور X .

نجد احداثيات البؤرتين :-

معادلة الدائرة هي:

$$x^2+(y-6)^2=10^2$$

$$\boxed{y=0} \to x^2+(-6)^2=100 \to x^2+36=100$$

$$x^2=100-36=64 \to x^2=64$$

$$x=\pm 8$$

إذاً البؤرتان هما $F_1(8,0)$ $F_2(-8,0)$

وبالتالي $2c=8-(-8) \leftarrow 2c=16 \leftarrow \boxed{c=8}$

نجد b :

$$b^2=a^2-c^2=10^2-8^2=100-64$$

اذاً $b^2=36$

$$a^2=100$$

ومعادلة القطع الناقص : $\boxed{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1}$

د. البؤرة اليمنى هي $F:(8,0)$ ، البؤرة اليسرى $(-8,0)$

المستقيم العامود للمحور X ويمر في البؤرة اليسرى

معادلته $\boxed{x=-8}$

نجد تقاطع المستقيم $x=-8$ مع القطع الناقص:

$$\frac{(-8)^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{64}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \xrightarrow{\cdot 3600} 2304+100y^2=3600$$

$$100y^2=3600-2304=1296 \Rightarrow 100y^2=1296 \Rightarrow y^2=12.96$$

$$y=\pm\sqrt{12.96}=\pm 3.6$$

$$\boxed{T(-8,-3.6)\ ,\ Q(-8,3.6)}$$

اذاً تقاطع $x=-8$ مع القطع الناقص

نجد تقاطع المستقيم $x=-8$ مع الدائرة:

$$(x)^2+(y-6)^2=100$$

$$(-8)^2+(y-6)^2=100$$

$$64+(y-6)^2=100$$

$$(y-6)^2=100-64=36$$

$$(y-6)^2=36 \Rightarrow \begin{cases} y-6=6 \Rightarrow \boxed{y=12} \\ y-6=-6 \Rightarrow \boxed{y=0} \end{cases}$$

اذاً نقاط تقاطع الدائرة مع المستقيم $\boxed{x=-8}$ هي:

$K:(-8,12)$ $L:(-8,0)$

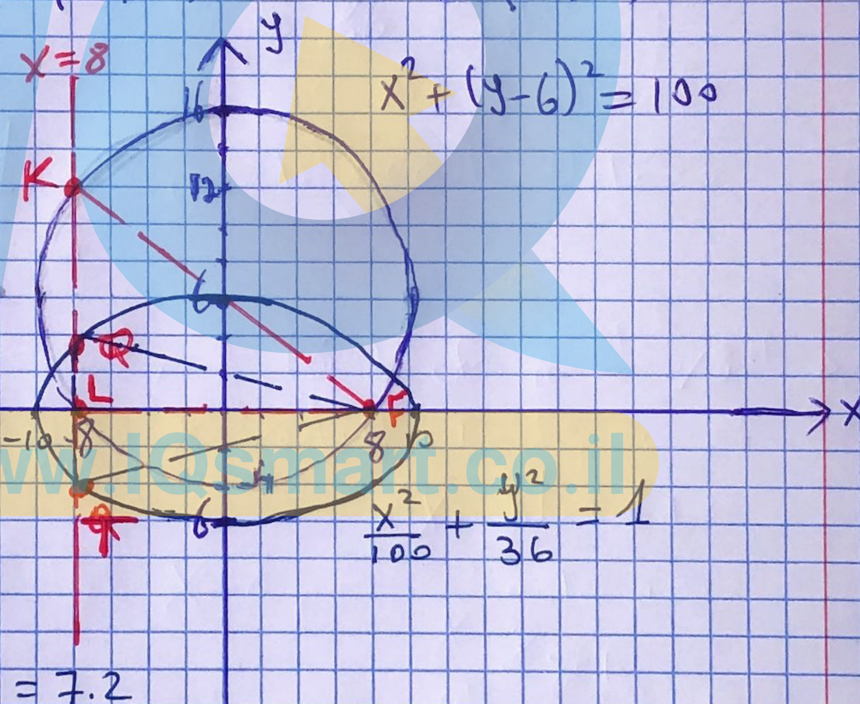
$K:(-8,12)$

$L:(-8,0)$

$KL=12$

$LF=8$

$F(8,0)$



$Q:(-8,3.6)$

$T:(-8,-3.6)$

$QT=3.6-(-3.6)=7.2$

للمثلثين KLF و TQF يوجد نفس الارتفاع LF ولذلك النسبة بين مساحاتهم هي النسبة بين القاعدتين, لذلك:

$$\frac{S_{\triangle KLF}}{S_{\triangle TQF}}=\frac{KL}{QT}=\frac{12}{7.2}=\boxed{1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}}$$

حل سؤال 2

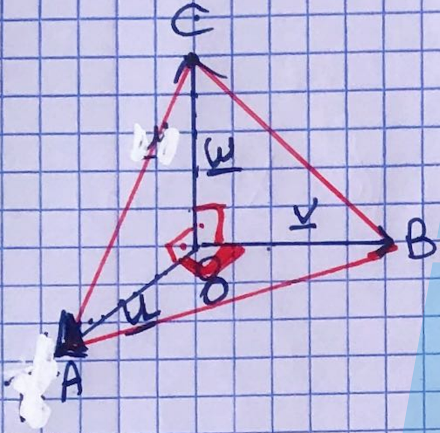
OABC هرم. القاعدة مثلث ABC

$\vec{OC}=\underline{w}$ $\quad \vec{OB}=\underline{v}$ $\quad \vec{OA}=\underline{u}$

$\measuredangle AOB=\measuredangle BOC=\measuredangle COA=90^\circ$

$|\underline{w}|=|\underline{u}|=|\underline{v}|$

مُوفق رسم للهرم يُجسّد معطيات السؤال.



$\underline{w}\cdot\underline{v}=\underline{w}\cdot\underline{u}=\underline{u}\cdot\underline{v}=0$

النقطة H تحقق:

$\vec{OH}=t\cdot\underline{u}+s\underline{v}+k\underline{w}$

بحيث t, s, k بارمترات.

ومعلوم ان $\vec{OH}$ يعامد القاعدة

$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=-\underline{u}+\underline{v}$ — P

$\boxed{\vec{AB}=\underline{v}-\underline{u}}$

$\vec{AC}=\vec{OA}+\vec{OC}=-\underline{u}+\underline{w}$

$\boxed{\vec{AC}=\underline{w}-\underline{u}}$

$\vec{OH}$ يعامد القاعدة اذا تحقق أن:

$\vec{OH}\perp\vec{AB} \quad , \quad \vec{OH}\perp\vec{AC}$

$\vec{OH}\cdot\vec{AB}=0 \quad // \quad \vec{OH}\cdot\vec{AC}=0$

$(t\cdot\underline{u}+s\cdot\underline{v}+k\cdot\underline{w})(\underline{v}-\underline{u})=0 \quad // \quad (t\cdot\underline{u}+s\cdot\underline{v}+k\cdot\underline{w})(\underline{w}-\underline{u})=0$

$\to t\cdot\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{v}}_{0}+s\cdot\underline{v}^2+k\cdot\underbrace{\underline{w}\cdot\underline{v}}_{0}-t\cdot\underline{u}^2-s\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{v}}_{0}-k\cdot\underbrace{\underline{w}\cdot\underline{u}}_{0}=0$

$\Rightarrow s\cdot\underline{v}^2-t\cdot\underline{u}^2=0 \Rightarrow s\cdot\cancel{|\underline{v}|^2}=t\cdot\cancel{|\underline{u}|^2} \Rightarrow \boxed{s=t}$ *

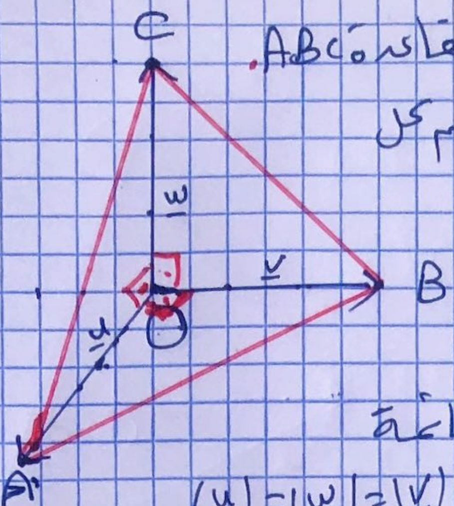
$|\underline{u}|=|\underline{v}|$

$\to \underbrace{t\cdot\underline{u}\cdot\underline{w}}_{0}+\underbrace{s\cdot\underline{v}\cdot\underline{w}}_{0}+k\cdot\underline{w}^2-t\cdot\underline{u}^2-\underbrace{s\cdot\underline{v}\cdot\underline{u}}_{0}-\underbrace{k\cdot\underline{w}\cdot\underline{u}}_{0}=0$

$\Rightarrow k\cdot\underline{w}^2-t\,\underline{u}^2=0 \Rightarrow k\cancel{|\underline{w}|^2}=t\cdot\cancel{|\underline{u}|^2} \Rightarrow \boxed{k=t}$ **

$|\underline{w}|=|\underline{u}|$

لذا من * و ** نستنتج ان $\boxed{t=s=k}$ وهو المطلوب



ب) M نقطة التقاء المتوسطات للقاعدة ABC.

نقطة التقاء المتوسطات تقسم كل متوسط بنسبة $1:2$ لصالح جهة الرأس.

بما أن ΔOAC و ΔOBC و ΔOAB هي مثلثات قائمة الزاوية ومتساوية الساقين: $(\underline{v}=|\underline{w}|=|\underline{u}|)$

اذاً $AC=BC=AB$ (الوتر في كل مثلث متساوي).

أي أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

وبالتالي نستنتج أن الهرم $OABC$ هو **هرم قائم**

(قاعدته مثلث متساوي الأضلاع وأحرفه الجانبية متساوية)

في المثلث المتساوي الأضلاع المستقيم المتوسط هو نفسه الارتفاع (ومنصف الزاوية ايضاً).

وهذا معناه أن المتوسطات في المثلث ABC هي أعمدة متوسطة أيضاً. وبالتالي نقطة التقاء المتوسطات هي نقطة التقاء الأعمدة المتوسطة.

اذاً استنتجنا أن:

* M هي نقطة التقاء الأعمدة المتوسطة

** $OABC$ هرم قائم.

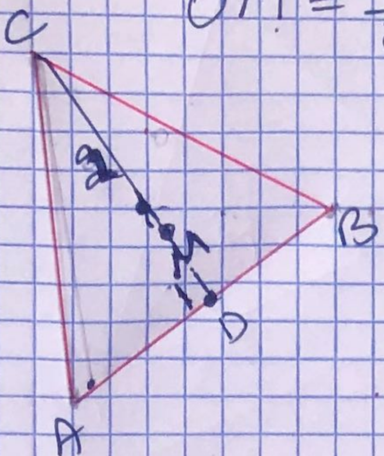
وبما أنه M هي نقطة التقاء الأعمدة المتوسطة اذاً هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

وبما أن الهرم قائم اذاً الارتفاع النازل من الرأس على القاعدة يمر في مركز الدائرة المحيطة بالقاعدة أي بـ M

$\boxed{\text{وبالتالي } OM \text{ هو ارتفاع الهرم.}}$

نبرهن أن:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$



لنكن D منتصف $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{v} - \underline{u}$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\underline{v} - \underline{u}) = \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -(\underline{w} - \underline{u}) + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CD} = \underline{u} - \underline{w} + \frac{1}{2}\underline{v} - \frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \underline{w}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} - \cancel{\frac{1}{2}}\underline{w}\right)$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$\underline{w} + \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} - \frac{2}{3}\underline{w} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

وهو المطلوب.

ج- P نقطة تقع على المستقيم l الموضوع عليه الارتفاع النازل على القاعدة ABC أي ان OM - ارتفاع الهرم. يقع على المستقيم l (النقاط O, M, P تقع على l).

$$\text{حجم الهرم} = V_{OABC} = \frac{|\overrightarrow{OM}| \cdot S_{\triangle ABC}}{3} \qquad V_{PABC} = \frac{|\overrightarrow{PM}| \cdot S_{\triangle ABC}}{3}$$

لكي يتحقق ان $V_{PABC} = 2 \cdot V_{\triangle OABC}$

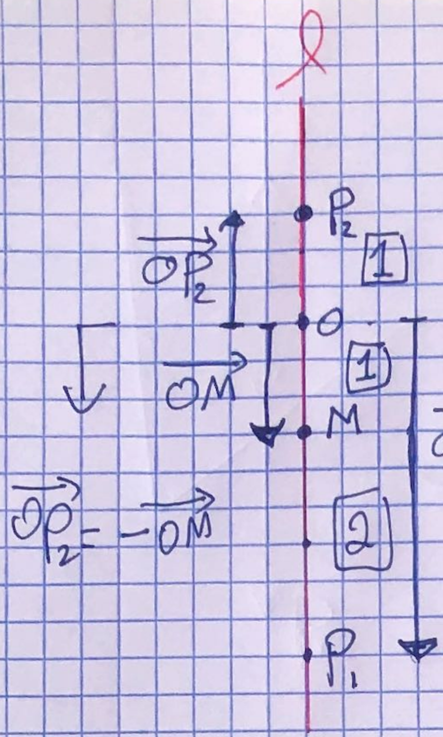
يجب ان يكون طول الارتفاع $\overrightarrow{PM}$ ضعف طول $\overrightarrow{OM}$

لأن للهرمين نفس القاعدة. لذلك $\overrightarrow{OP_2} = 3\overrightarrow{OM}$ او $\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OM}$

لأن النقطة P ممكن ان تقع على فوق M أو تحتها

وعندها سيتحقق $|\vec{OP}|=|2\vec{OM}|$

* نرفق رسم توضيحي لوصف الامكانيتين للنقطة P.



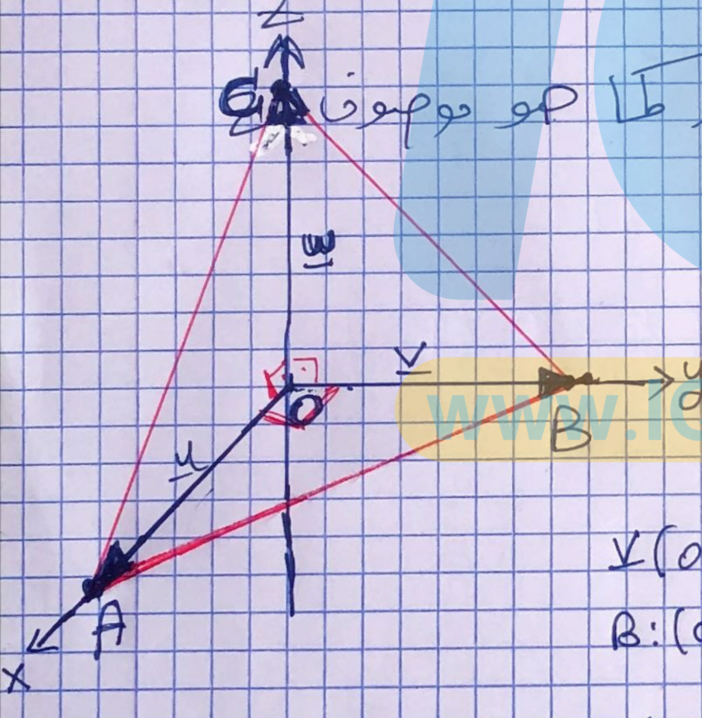
$\vec{OP_1}=3\vec{OM}$

$\vec{OP_1}=3\vec{OM}=3\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}\right)$

$\boxed{\vec{OP_1}=\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}}$

$\vec{OP_2}=-\vec{OM}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}$

$\boxed{\vec{OP_2}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}-\frac{1}{3}\underline{w}}$



د. نضع الهرم في هيئة محاور كما هو موصوف

معطى أن $|\underline{u}|=a$

لذلك احداثيات $\underline{u}$ هي

$\underline{u}:(a,0,0)$

$A:(a,0,0)$

واحداثيات $\underline{v}$ هي

$\underline{v}(0,a,0)$

$B:(0,a,0)$

واحداثيات $\underline{w}$ هي:

$\underline{w}:(0,0,a)$

$C:(0,0,a)$

التمثيل البارامتري للمستقيم l هو

$l:\underline{X}=(0,0,0)+q\left(\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}\right)=q\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$

$O+q\vec{OM}$ (q برامتر)

$\boxed{l:\underline{X}=\frac{qa}{3}(1,1,1)}$ $\longrightarrow$ او $\boxed{l:T(1,1,1)}$ $T=\frac{qa}{3}$

هـ. بما أن $\overrightarrow{OM}$ يقع على l و $\overrightarrow{OM}$ معامد للمستوى ABC

لذلك

$$\Pi_{ABC}: x+y+z+D=0$$

• المتجه الاتجاهي لـ l عمودي على Π_{ABC}

أي أن معاملات المتغيرات x,y,z في معادلة المستوى هي المتجه $(1,1,1)$

النقطة $A:(a,0,0)$ تقع على المستوى، نعوّضها في معادلة المستوى ونجد D.

$$\Pi_{ABC}: x+y+z+D=0$$

$$a+0+0+D=0 \Longrightarrow \boxed{D=-a}$$

إذاً معادلة المستوى ABC هي:

$$\boxed{\Pi_{ABC}: x+y+z-a=0}$$

و. قاعدة الهرم OABC هي المثلث المتساوي الأضلاع ABC

ولكن يمكن اعتبار قاعدة الهرم هي المثلث OAB

والارتفاع OC وعندها حجم الهرم هو

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta AOB}\cdot OC$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$OC=a$$

إذاً نتحقق:

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=85\frac{1}{3}$$

$$\frac{a^3}{6}=85\frac{1}{3} \Longrightarrow a^3=6\cdot 85\frac{1}{3}=512$$

$$a^3=512 \Longrightarrow a=\sqrt[3]{512}=8$$

$$\boxed{a=8}$$

حل سؤال 3:

أ- بحسب المعطيات $z = R\,cis\alpha$ يقع بالربع الثالث

$\Downarrow$

$180 < \alpha < 270$

$$z = R\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = R\,cis\alpha$$

$$\bar{z} = R(\cos\alpha - i\sin\alpha) = R\,cis(-\alpha)$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = r\cdot cis\beta \rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$tg\beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \beta = -60 + 180$$

$$\beta = 120$$

* انتبه العدد $\frac{z}{\bar{z}} = r\,cis\beta$ يقع في الربع الثاني. و $\beta = 120$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{\cancel{R}\,cis\alpha}{\cancel{R}\,cis(-\alpha)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\,cis120$$

$$cis\,2\alpha = cis120 \Rightarrow 2\alpha = 120 + 360K$$

$$\alpha = 60 + 180K$$

$K = 0 \rightarrow \alpha = 60$ غير ملائم

$K = 1 \rightarrow \alpha = 240$ ✓

$$\boxed{\alpha = 240}$$

ب- معطى أن $\left|2iz\right| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| + \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 10$

$R = ?$

$$|2iz| = |2\cdot \overset{i}{\overline{cis90}} \cdot \overset{z}{\overline{Rcis240}}| = |2R\,cis330|$$

$$\left|\frac{\bar{z}}{i}\right| = \left|\frac{R\,cis(-240)}{cis90}\right| = |R\,cis(-240-90)| = |R\,cis(-330)|$$

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{\cancel{R}\,cis240}{\cancel{R}\,cis(-240)}\right| = |cis\,240-(-240)| = |cis480|$$

إذاً المعادلة

$$|2iz| + \left|\frac{\bar{z}}{i}\right| + \left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = 10$$

مطابقة المعادلة:

$$|2R\,\text{cis}\,330| + |R\,\text{cis}(-330)| + |\text{cis}\,480| = 10$$

$$\Rightarrow 2R\,|\text{cis}\,330| + R\,|\text{cis}(-330)| + |\text{cis}\,480| = 10$$

$$|\text{cis}\,330| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1 = |\text{cis}(-330)|$$

$$|\text{cis}\,480| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$$

$$\Rightarrow 2R\cdot 1 + R\cdot 1 + 1 = 10 \Longrightarrow 3R = 9$$

$$\boxed{R = 3}$$

$$\boxed{z = 3\,\text{cis}\,240} \qquad w^9 = \frac{z^3}{27} \;\text{-P.}$$

$$w^9 = \frac{(3\,\text{cis}\,240)^3}{3^3} = \frac{\cancel{3^3}\,\text{cis}\,240\cdot 3}{\cancel{27}} = \text{cis}\,720$$

$$w^9 = \text{cis}\,720 = \text{cis}\,0$$

$$w_k = 1\,\text{cis}\left(\frac{0}{9} + \frac{360k}{9}\right) = 1\,\text{cis}(40k)$$

$k = 0, 1, 2, \dots 8$

$w_0 = \text{cis}\,0$ / $w_1 = \text{cis}\,40$ / $w_2 = \text{cis}\,80$

$w_3 = \text{cis}\,120$ / $w_4 = \text{cis}\,160$ / $w_5 = \text{cis}\,200$

$w_6 = \text{cis}\,240$ / $w_7 = \text{cis}\,280$ / $w_8 = \text{cis}\,320$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3\,\text{cis}\,240}{3\,\text{cis}(-240)} = \text{cis}\,480 = \text{cis}\,120 = w_3$$

إذاً: $\boxed{w_3 = \frac{z}{\bar{z}} = \text{cis}\,120}$ وهو أحد حلول المعادلة

ب)

$$\frac{z}{\bar{z}} = cis\,120 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$B:\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{3\,cis(-240)}{3\,cis\,240} = cis(-480) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

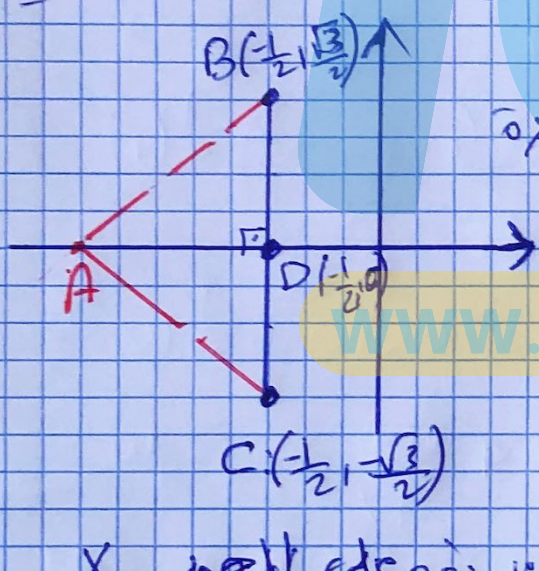
$$C:\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A = z + K = 3cis\,240 + ai$$ (k = ai, a حقيقي)

$$A = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + ai$$

$$A = -\frac{3}{2} + \left(a - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

* نرسم رسم تقريبي يوضح رؤوس المثلث ABC المتساوي الساقين $AB = AC$.



بما أن القاعدة BC معامدة للمحور x و $BD = DC$

اذًا D منتصف BC

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{2} = DC$$

وبالتالي المحور x عموديًا على القاعدة BC وينصفها

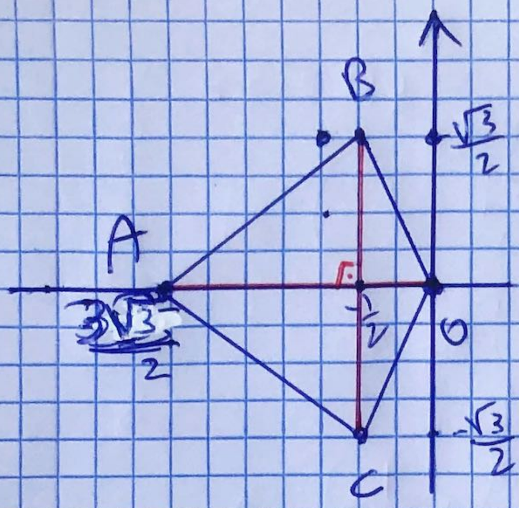
لذلك الرأس A يجب أن يقع على المحور x

لأن الارتفاع على القاعدة BC يجب أن ينصفها ويكون عموديًا عليها. وبالتالي الاحداثي y للنقطة A هو 0.

أي يتحقق:

$$a - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{A\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad K = \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$$



الشكل الرباعي OABC أقطاره
متعامدة $OA \perp BC$
لذلك

$$S_{\square OABC} = \frac{OA \cdot BC}{2}$$

$$S_{\square OABC} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{\cancel{2}}}_{OA} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}}_{BC}$$

$$\boxed{S_{\square OABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

حل سؤال 4

$$f(x) = x^2 \cdot e^{a-x^3}$$

أ.1 $f(x) > 0$ لكل $x \neq 0$

لأن الاقتران e^{a-x^3} موجب لكل x

و $x^2 > 0$ لكل $x \neq 0$

أ.2

$$f'(x) = 2x \cdot e^{a-x^3} + x^2 \cdot e^{a-x^3} \cdot (-3x^2)$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{a-x^3} - 3x^4 \cdot e^{a-x^3}$$

$$f'(x) = x \cdot e^{a-x^3}(2 - 3x^3)$$

$$f'(x) = 0$$

$x = 0$ او $2 - 3x^3 = 0$

$$x = \sqrt[3]{2/3} = 0.8735$$

اذا نقاط الشك هي $x=0$ / $x=0.8735$

نفحص النقاط بواسطة جدول:

x	$x<0$ ($x=-1$)	0	$0<x<0.8735$ ($x=0.5$)	0.8735	$x>0.8735$ ($x=1$)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\boxed{x=0 \text{ min}}$ $\boxed{x=0.8735 \text{ max}}$

ب. المساحة المحصورة بين الدالة والمحور x $= \left|\int_0^{0.8753} f'(x)\,dx\right| = F(0.8753) - \underbrace{F(0)}_{0} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$

($0.8753 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$)

$$\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right)^2 \cdot e^{a-\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3} - 0 = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$\left(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right)^2 \cdot e^{a-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

f': $-$ | 0 | $+ + + +$ | 0.875 | $- -$

الاقتران موجب $0 \le x \le 0.875$

لذلك التكامل موجب.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot e^{a-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot e^{a-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot e^{a-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

$$e^{a-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}}{\sqrt[3]{\frac{4}{9}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{\cancel{4}e}{\cancel{9}}}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{9}}}} = \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{a-\frac{2}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \rightarrow a - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{a=1}$$

$$f(x) = x^2 \cdot e^{1-x^3}$$

$f(0) = 0$ $\boxed{(0,0) \text{ min}}$

$$f\left(\sqrt[3]{2/3}\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot e^{1-\left(\sqrt[3]{2/3}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(2/3\right)^2} \cdot e^{1-2/3}$$

$$f\left(\sqrt[3]{2/3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot e^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt[3]{e} = \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$$

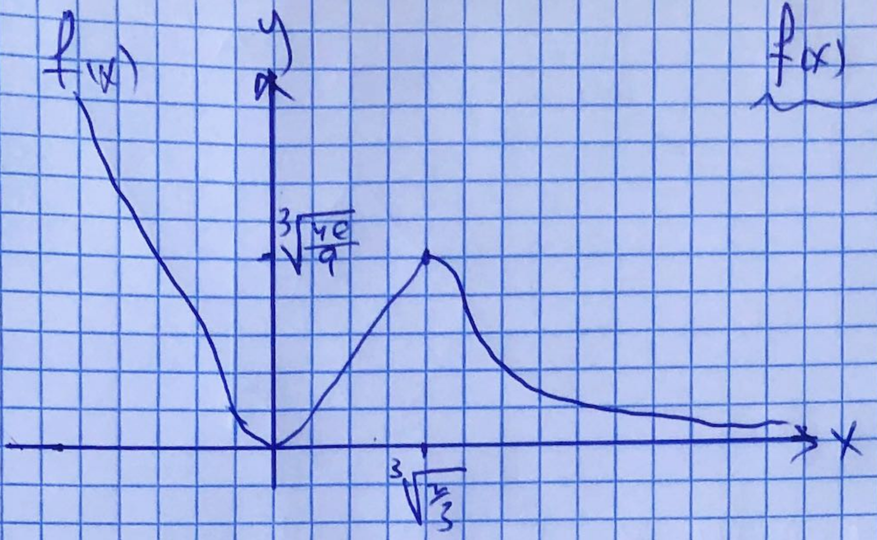
$$\boxed{\left(\sqrt[3]{2/3}, \sqrt[3]{\frac{4e}{9}}\right) \text{ max}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty^2 \cdot e^{1-\infty^3} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^2 \cdot e^{1+\infty^3} \longrightarrow \infty$$

15

الرسم البياني لـ $f(x)$



ب.1

بحسب الرسم البياني للدالة $f(x)$ $\boxed{g'(x)=f(x)}$

نرى ان $g'(x)>0$ لكل $x\neq 0$

وبما انه بالمجال $x<0$ و $x>0$ $g'(x)$ موجبه لذلك

ايضا في $x=0$ سيتحقق ان $g'(x)\geq 0$

$\boxed{\text{ولذلك } g(x) \text{ تصاعديه لكل } x}$

ب.2 نقاط التواء الدالة $g(x)$ هي النقاط القصوى لـ $g'(x)$

بحسب رسم $g'(x)$ (او $f(x)$) يوجد نقطتين قصويتين للدالة $g'(x)$ (التقدم بالسؤال ب):

لـ $g(x)$ يوجد نقطتي التواء.

ج- نقطة الالتواء اليمنى هي $B:\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}\right)$ [نعطي ان الاحداثي y لها $\frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$]

$$g(x)=\int \overset{f(x)}{g'(x)}\,dx=\int x^2\cdot e^{1-x^3}\,dx$$

نفرض ان: $K(x)=1-x^3$

$$=\int -\frac{1}{3}(-3x^2)\cdot e^{1-x^3}\,dx=-\frac{1}{3}\int -3x^2\cdot e^{1-x^3}\,dx$$

وهذه الصورة من التكامل عبارة عن:

$$=-\frac{1}{3}\int K'(x)\cdot e^{K(x)}\,dx=-\frac{1}{3}\cdot e^{K(x)}+c=\boxed{-\frac{1}{3}e^{1-x^3}+C}$$

معطى أن النقطة $B:\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}\right)$ تقع على $g(x)$

لذلك يتحقق:

$$g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\cdot e^{1-\left(\sqrt[3]{2/3}\right)^3} + C = \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}e^{1-2/3} + c = \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} + c = \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3}$$

$$c = \frac{e-\sqrt[3]{e}}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} = \frac{e-\cancel{\sqrt[3]{e}}+\cancel{\sqrt[3]{e}}}{3}$$

$$\boxed{c = \frac{e}{3}}$$

إذاً:

$$g(x) = -\frac{1}{3}e^{1-x^3} + C$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}e^{1-x^3} + \frac{e}{3}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{-e^{1-x^3}+e}{3}}$$

حل سؤال 5

أ. بحسب المعطيات، $f(x)$ هي دالة فردية ومعرفة لكل x

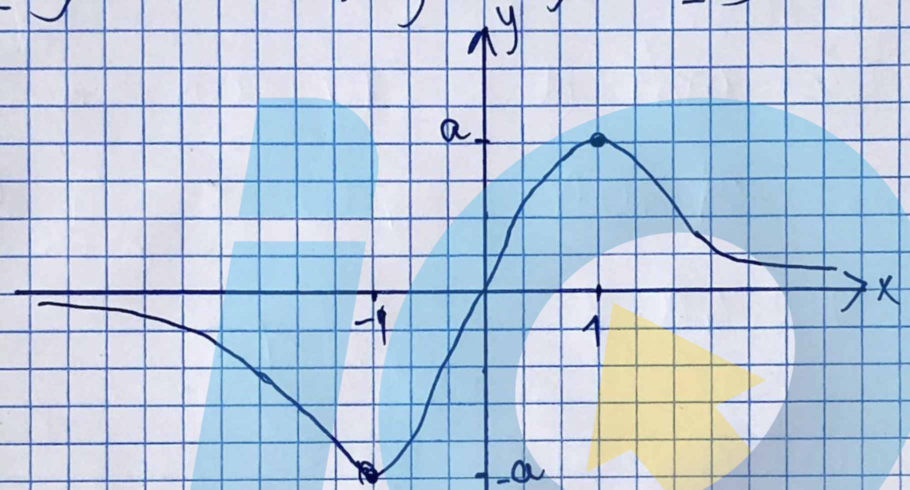
$y=0$ خط تقارب أفقي.

$(-1,-a)$ نقطة نهاية صغرى وحيدة $(a>0)$،

$(1,a)$ نقطة نهاية عظمى وحيدة

لانه في الدالة الفردية يتحقق $f(-x)=-f(x)$

بما ان الدالة فردية ومعرفة لكل x لذلك تمر بـ $(0,0)$



ب.1 $h(x)=\ln f(x)$

الدالة $h(x)$ معرفة في المجال الذي فيه $f(x)>0$

اي ان مجال تعريف $h(x)$ هو $x>0$.

ب.2 $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \ln f(0^+) = \ln 0^+ \to -\infty$

لذلك $x=0$ هو خط تقارب للدالة $h(x)$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(\underbrace{f(x)}_{0}) = \ln 0^+ = -\infty$

ولذلك لا يوجد خط تقارب افقي لـ $h(x)$

ب.3 لكي يقطع الرسم البياني لـ $h(x)$ المحور x في نقطتين يجب أن يتحقق أن:

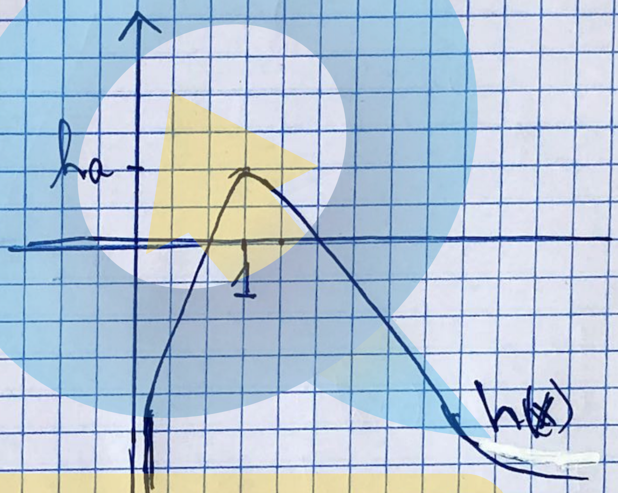
$$h(x_0) = \ln f(x_0) = \ln(1)$$

$$f(x_0) = 1$$

وهذا ممكن - ضمن مجال تعريف الدالة - فقط عندما يكون $a>1$ إذ أنه لو كان $a=1$ سنحصل على نقطة صفرية واحدة لـ $h(x)$ وإذا كان $0<a<1$ لن يكون لـ $h(x)$ نقاط صفرية

لذلك نقول $\boxed{a>1}$ يكون للدالة $h(x)$ نقطتين صفريتين.

ب.4



1.ج $f(x) = \frac{8x}{1+x^2}$, ويتحقق $g'(x) = f(x)$ و $g(0) = 0$

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = \int \frac{8x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{4\cdot(2x)}{1+x^2}\,dx = 4\int \frac{\overset{M'(x)}{2x}}{\underset{M(x)}{1+x^2}}\,dx = 4\ln(1+x^2) + C$$

$$g(x) = 4\ln(1+x^2) + C$$

$$g(0) = 4\underbrace{\ln(1+0^2)}_{0} + C = 0$$

$$C = 0$$

$$\boxed{g(x) = 4\ln(1+x^2)}$$

$$g(x) = 4\ln(1+x^2)$$

2.ד

$$g(-x) = 4\ln(1+(-x)^2) = 4\ln(1+x^2) = g(x)$$

اذاً $g(-x) = g(x)$

والدالة $g(x)$ زوجية

(5) بما أن الدالة $g(x)$ زوجية ومعرفة لكل x

لذلك $\int_{-5}^{5} g(x)\,dx$ عبارة عن:

$$\int_{-5}^{5} g(x)\,dx = \int_{-5}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{5} g(x)\,dx$$

ولأن الدالة متماثلة بالنسبة للمحور y (زوجية) لذلك

$$\int_{-5}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{5} g(x)\,dx$$

وبالتالي:

$$\int_{-5}^{5} g(x)\,dx = 2\int_{-5}^{0} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{5} g(x)\,dx$$

اذاً

$$\int_{-5}^{5} g(x)\,dx = 2\int_{-5}^{0} g(x)\,dx$$

ويتحقق: $\boxed{t=0}$