حل نموذج بجروت

(806)-581

موعد (ب) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

www.IQsmart.co.il

مُلاحظة:

في موعد (ب) كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

بحسب المعطيات:

يركض 4 عدائين في سباق تتابع على مسار طوله 1440 كم. كل عداء يركض مسافة متساوية

لذلك كل عداء يركض مسافة تساوي $\frac{1440}{4} = 360$ كم

بحسب المعطيات:

سرعة العداء الثاني = 1.5 سرعة العداء الاول

سرعة العداء الثالث = $\frac{1}{2}$ سرعة العداء الثاني

سرعة العداء الرابع = سرعة العداء الثالث.

نفرض سرعة الأول = V كم/س , اذاً:

سرعة الثاني = $1.5V$ كم/س

سرعة الثالث = $0.75V$ كم/س = سرعة الرابع

بداية	I الأول	II الثاني	III الثالث	IV الرابع
	360 م	360 م	360 م	360 م
مسافة	360	360	360	360
سرعة	V	$1.5V$	$0.75V$	$0.75V$
الزمن بالثواني:	$\frac{360}{V}$	$\frac{360}{1.5V} = \frac{240}{V}$	$\frac{360}{0.75V} = \frac{480}{V}$	$\frac{480}{V}$

معلوم أن العدائين الاربعة أنهوا زمن المسار خلال 3 دقائق و 54 ثانية أي $234 = 180+54$ ثانية

أي يتحقق:

$$\frac{360}{V} + \frac{240}{V} + \frac{480}{V} + \frac{480}{V} = 234$$

$$\frac{1560}{V} = 234 \Longrightarrow \boxed{V = 6\frac{2}{3}}$$

www.IQsmart.co.il

أ) 2)

سرعة العداء الأول : $V = 6\frac{2}{3}$ م/ث

سرعة العداء الثاني : $1.5V = 10$ م/ث

سرعة الثالث = سرعة الرابع $= 0.75V = 5$ م/ث

ب.1)

بحسب المعطيات :-

سرعة العداء الأول والثاني لم تتغير.

سرعة العداء الثالث والرابع تغيرت.

نفرض سرعة الثالث الجديدة V_3 م/ث وسرعة الرابع V_4 م/ث

معطى أن العداء الثالث يركض كل 100 م بزمن أقل ب 2.5 ثانية من العداء الرابع، لذلك الزمن الذي يركض فيه العداء الثالث مسار (ال 360 متر) أقل ب $\frac{360}{100} \cdot 2.5 = 9$ ثواني.

إذاً: زمن ركض العداء الثالث أقل ب 9 ثواني من زمن ركض العداء الرابع

www.Qsmart.co.il

ب.2)

الزمن الذي قطع فيه كل من العداء الثالث والرابع المسار قبل تغيير السرعات هو $\frac{360}{5} = 72$ ثانية

نفرض أن زمن العداء الثالث بعد تغيير السرعات هو T، إذاً زمن الرابع لقطع كل المسار هو $T+9$

زمن الأول هو $\frac{360}{6\frac{2}{3}} = 54$ ثانية وزمن الثاني $\frac{360}{10} = 36$

ويتحقق: أن الزمن للعداء الثالث والرابع لقطع

المسافة مساوية لـ 1.5 ضعف زمن الأول والثاني معاً

اي يتحقق :-

$$T + (T+9) = 1.5(54+36)$$

$$2T + 9 = 135 \Longrightarrow 2T = 126 \Longrightarrow T = 63$$ ثانية

اذاً الزمن الذي احتاجه العداء الثالث لقطع المسار هو 63 ثانية، وبما انه قبل تغيير سرعته احتاج لـ 72 ثانية لقطع المسار لذلك: سرعة العداء الثالث كبرت.

العداء الرابع (بعد تغيير السرعة) احتاج لـ $T+9$ ثواني اي $63+9 = 72$ ثانية، وهذا هو نفس الزمن الذي احتاجه قبل [illegible]

اذاً:
سرعة العداء الثالث كبرت.
سرعة العداء الرابع لم تكبر (بقيت ثابتة).

www.IQsmart.co.il

سؤال 2

أ- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n}$, $a_{2n} = a_1 \cdot q^{2n-1}$

$$a_1 \cdot a_{2n} \stackrel{?}{=} a_n \cdot a_{n+1}$$

$$a_1 \cdot a_1 \cdot q^{2n-1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot a_1 \cdot q^{n}$$

$$a_1^2 \cdot q^{2n-1} = a_1^2 \cdot q^{n-1+n} \Longrightarrow \boxed{a_1^2 \cdot q^{2n-1} = a_1 \cdot q^{2n-1}}$$

$\boxed{\text{وهو المطلوب}}$

ب. في اول 2K حدود , الحدين الوسطين هما a_k , a_{k+1}

معطى أن:

$$a_k \cdot a_{k+1} = 10240\, a_1$$

بحسب البند (أ) يتحقق:-

$$a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$$

ولذلك:

$$a_k \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_{2k} = 10240\, a_1$$

$$\Longrightarrow \cancel{a_1} \cdot a_{2k} = 10240\, \cancel{a_1} \Longrightarrow \boxed{a_{2k} = 10240}$$

كذلك معطى أن $a_{2k-2} = 2560$

وبالتالي:-

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{10240}{2560}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot q^{2k-1}}{\cancel{a_1} \cdot q^{2k-3}} = 4 \Longrightarrow q^2 = 4 \Longrightarrow$$

$$q = \pm\sqrt{4} \Longrightarrow \boxed{q_1 = 2} \;/\; \boxed{q_2 = -2}$$

www.IQsmart.co.il

1.P

بحسب المعطى $a_1 = 5$ وبما أنه يتحقق أن

$$\underbrace{a_k \cdot a_{k+1}} = 10240\, a_1$$

$$a_k \cdot a_{k+1} = \cancel{a_1} \cdot a_{2k} = 10240\, \cancel{a_1}$$

فردي

$$a_{2k} = \underset{5}{a_1}\, q^{2k-1} = 10240 \Rightarrow q^{2k-1} = 2048$$

q^{2k-1} عبارة عن q مرفوع لقوى فردية

لذلك $q^{\text{فردي}}$ = عدد موجب، أي أن q بالضرورة موجبة

أي أن $\boxed{q = 2}$ وبالتالي $\boxed{\text{المتوالية هندسية}}$

2.P

بما أنه يتحقق $q^{2k-1} = 2048$ (من التبسيط في 1.P)

$$\Rightarrow 2^{2k-1} = 2048 \Rightarrow 2^{2k-1} = 2^{11}$$

$$2k - 1 = 11 \Rightarrow 2k = 12 \Rightarrow \boxed{k = 6}$$

www.IQsmart.co.il

1.ب

بحسب المعطيات فالمتوالية B هي:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots$$

أي يتحقق: $b_n = \frac{1}{a_n}$ و $b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$

من هنا

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}$$

أي أن المتوالية B هندسية لانهائية أساسها $\frac{1}{2}$

م المتوالية C هي المتوالية

$$-\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ -\frac{1}{a_3},\ \frac{1}{a_4}$$

أي أنها تحقق :

$$C_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{a_n}$$

هذه متوالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}}_{-1} \cdot \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} = -1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

أي أن C_n هي متوالية لا نهائية متقاربة

حدها الأول هو $-\frac{1}{a_1} \leftarrow -\frac{1}{5}$ وأساسها

هو $-\frac{1}{2}$.

$$S_c = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$S_c = \frac{-\frac{1}{5}}{+1.5} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{-2}{15}}$$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 3

بحسب المعطيات:

سكان المدينة يتوزعون الى شباب وبالغين وكذلك الى سكان يجيدون الانجليزية وسكان لا يجيدون الانجليزية.

نبني جدول ثنائي الابعاد ونعبر بواسطته عن فضاء التجربة والمعطيات:

	بالغون	شباب	الاحتمال
يجيدون الانجليزية	$3p$ (2)	p (1)	$4p$
لا يجيدون الانجليزية	$11p$ (4)	$1-15p$ (5)	$1-4p$ (3)
الاحتمال	$14p$	$1-14p$	1

(1) بحسب المعطيات: احتمال اختيار شاب يجيد الانجليزية هو p

(2) بما ان عدد البالغين الذين يجيدون الانجليزية 3 اضعاف الشباب الذين يجيدون الانجليزية لذلك احتمال اختيار بالغ يجيد الانجليزية هو $3p$

www.IQsmart.co.il

(3) اذاً الاحتمال لاختيار شخص من سكان المدينة لا يجيد الانجليزية هو $1-4p$

(4) بحسب المعطيات عدد البالغين الذين لا يجيدون الانجليزية هو $3\frac{2}{3}$ ضعف عدد البالغين الذين يجيدون الانجليزية

اي الاحتمال لاختيار بالغ لا يجيد الانجليزية هو $(3\frac{2}{3})3p$

اي $11p$

(5) من هنا احتمال اختيار شاب لا يجيد الانجليزية هو

هو $(1-4p)-11p = \boxed{1-15p}$

أ.1

الاحتمال لاختيار بشكل عشوائي بالغ يجيد الانجليزية من بين جميع البالغين الذين يجيدون الانجليزية هو:

$$P\left(\text{اختيار بالغ يجيد الانجليزية} \;\middle|\; \text{اختيار بالغ}\right) = \frac{P\left(\text{بالغ يجيد الانجليزية} \cap \text{بالغ}\right)}{P(\text{بالغ})}$$

$$\overset{\text{بحسب الجدول}}{=} \frac{3p}{14p} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

ب

$$P\left(\text{اثنين من بين الثلاثة البالغين يجيدون الانجليزية}\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{14}\right)^2\left(\frac{11}{14}\right)^1 = \boxed{\frac{297}{2744}}$$

ج.1

الاحتمال لاختيار شاب لا يجيد الانجليزية من بين كل المشتركين في الاستطلاع هو بحسب الجدول

$$\boxed{1-15p}$$

ج.2

بما أن الاحتمال لاختيار شاب لا يجيد الانجليزية هو $1-15p$ ويتحقق أن

$$0<1-15p<1$$

اذن:

$0<1-15p$ وأيضاً $1-15p<1$

$15p<1 \Rightarrow p<\frac{1}{15}$ $\qquad$ $15p>1-1=0 \Rightarrow p>0$

اذن:

$$0<p<\frac{1}{15}$$

وهو المطلوب

د

الاحتمال لاختيار بالغ لا يجيد الانجليزية هو $11p$

الاحتمال لاختيار شاب لا يجيد الانجليزية هو $1-15p$

ويتحقق:

$$11p=1-15p$$

$$\Rightarrow 11p+15p=1 \Rightarrow 26p=1$$

$$\boxed{p=\frac{1}{26}}$$

www.IQSmart.co.il

بحسب الجدول

$$P(\text{بالغ}) = 14p = 14 \cdot \frac{1}{26} = \frac{14}{26} = \boxed{\frac{7}{13}}$$

$$P(\text{محب الانجليزية}) = 4p = 4 \cdot \frac{1}{26} = \boxed{\frac{2}{13}}$$

$$P(\text{بالغ} \cap \text{محب الانجليزية}) = 3p = \boxed{\frac{3}{26}}$$

يكون الحدثان A و B غير متعلقين اذا تحقق ان

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نفحص هل تتحقق هذه العلاقة بالنسبة للحدثين
اختيار بالغ و اختيار شخص يحب الانجليزية

$$P(\text{بالغ} \cap \text{محب الانجليزية}) = \frac{3}{26}$$

$$P(\text{بالغ}) \cdot P(\text{محب الانجليزية}) = \frac{7}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{14}{169}$$

ولا يتحقق ان $\frac{3}{26} \neq \frac{14}{169}$

لذلك الحدثان متعلقان

www.iQsmart.co.il

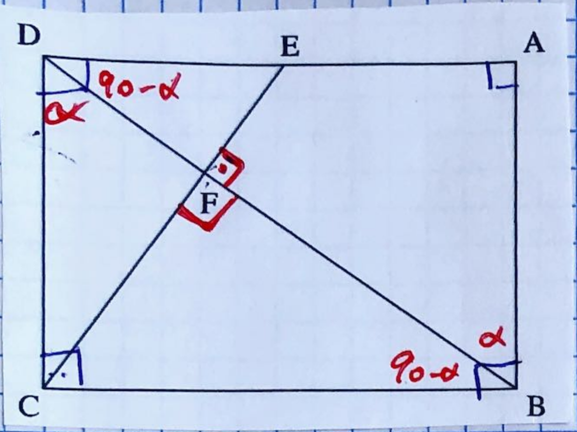
حل سؤال 4

بحسب المعطيات

ABCD مستطيل

E منتصف AD $\Leftarrow$ $DE=AE$

BD قطر المستطيل



ا) الشكل الرباعي EABF قابل للحصر داخل دائرة ، اي ان مجموع كل زاويتين متقابلتين $180°$

اي $\measuredangle A+\measuredangle F=180$ $(\measuredangle A=90)$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\measuredangle F=90}$

أ. المثلث BFC يشابه المثلث DAB

$\Delta DAB \sim \Delta BFC$ حسب (ز.ز)

$\measuredangle A=\measuredangle F=90°$

نفرض $\measuredangle ABD=\alpha$ $\Leftarrow$ $\measuredangle BDA=90-\alpha$ $\Leftarrow$ وأيضا $\measuredangle DBC=90-\alpha$

اي $\measuredangle DBC=\measuredangle BDA$

وهو المطلوب (أ)

ب - $DE=AE$ $\Longleftarrow$ $AD=BC=2DE$

بحسب نظرية طاليس الموسعة يتحقق:

$$\frac{EF}{FC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$$

وهو المطلوب (ب)

• ملاحظة يمكن ايضا ان نبرهن ان: $\Delta DFE \sim \Delta BFC$

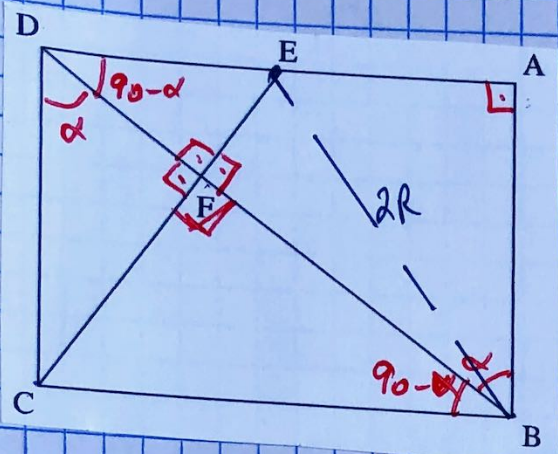
ونسبة التشابه هي $\frac{1}{2}$ ويتحقق $\boxed{\frac{EF}{FC}=\frac{1}{2}}$

ج. بحسب المعطى مساحة المثلث DEF هي S

$$S_{\Delta DEF}=\frac{DF\cdot EF}{2}=S \qquad S_{\Delta DFC}=\frac{DF\cdot \overset{\text{حسب (ب)}\ 2EF}{FC}}{2}=2S$$

$$\boxed{S_{\Delta DFC}=2S_{\Delta DEF}=2S}$$

www.IQsmart.co.il



$\Delta BFC \sim \Delta DFE$

حسب (ز، ز)

$$\frac{S_{\Delta BFC}}{S_{\Delta DFE}} = \left(\frac{FC}{FE}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\boxed{S_{\Delta BFC} = 4S}$$

وهو المطلوب (أ)

$$S_{\Delta DAB} = S_{\Delta DCB} = \overset{2S}{S_{\Delta DFC}} + \overset{4S}{S_{\Delta BFC}} = 6S$$

اذا $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta DCB} = 6S$

بما ان النسبة بين مساحات المثلثات المتشابهة هي تربيع النسبة بين الأضلاع المتناظرة (نسبة التشابه) لذلك

$$\frac{S_{\Delta DAB}}{S_{\Delta BFC}} = \frac{6S}{4S} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1.5 = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{1.5} = \frac{BD}{BC}}$$

$$\boxed{BD = \sqrt{1.5}\,BC}$$

وهو المطلوب (ب)

م 1. $DE = a \Rightarrow \boxed{BC = AD = 2a} \xRightarrow{\text{حسب (ب)}} \boxed{BD = 2\sqrt{1.5}\,a}$ أو $\boxed{BD = \sqrt{6}a}$

م 2. في الدائرة التي تحصر EABF زاوية F قائمة ومحيطية ولذلك تقابل القطر اي أن $EB = 2R$.

في ΔADB, $AD = 2a$, $BD = \sqrt{6}a \Leftarrow$

$$\underbrace{BD^2}_{6a^2} = \underbrace{AD^2}_{4a^2} + AB^2$$

$$2a^2 = AB^2 \rightarrow \boxed{\sqrt{2}a = AB}$$

في ΔABE: $AE = a$, $AB = \sqrt{2}a$, $BE = 2R$

$$\underbrace{BE^2}_{4R^2} = \underbrace{AE^2}_{a^2} + \underbrace{AB^2}_{2a^2} \rightarrow 4R^2 = 3a^2 \Rightarrow \boxed{2R = \sqrt{3}a}$$

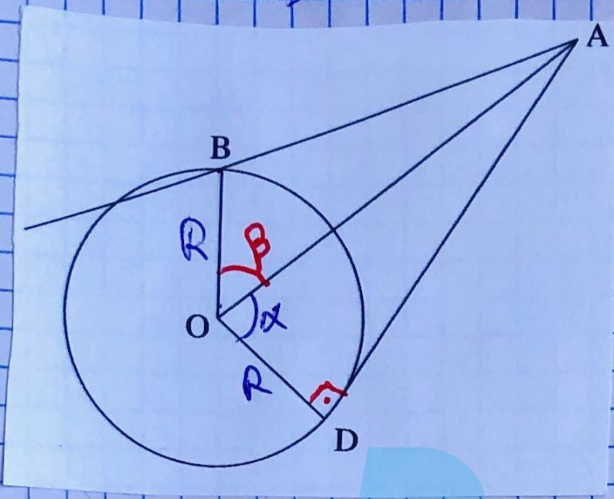
وهو المطلوب (ج)

حل سؤال 5

AD مماس ، OD نصف قطر

وبما ان المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

اذن $\measuredangle ODA = 90^\circ$.



أ.1 في المثلث ΔOAD يتحقق

$$\cos\alpha = \frac{\overset{R}{OD}}{OA}$$

$$\boxed{AO = \frac{R}{\cos\alpha}}$$

أ.2 في ΔABO بحسب قانون ال $\cos$ يتحقق :-

$$AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2OB \cdot AO \cdot \cos\beta$$

$$AB^2 = R^2 + \left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2 - 2R \cdot \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \cos\beta$$

$$AB^2 = R^2 + \frac{R^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2R^2 \cdot \cos\beta}{\cos\alpha} = R^2\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{AB = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}}$$

www.IQsmart.co.il

ب- $AB = \sqrt{2}R$

$$AB = \cancel{R} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cancel{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}} = \sqrt{2} \Rightarrow ()^2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{-2 + 1}_{-1} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha} \xRightarrow{\times\cos^2\alpha} \underbrace{-\cos^2\alpha + 1}_{\sin^2\alpha} = 2\cos\beta \cdot \cos\alpha$$

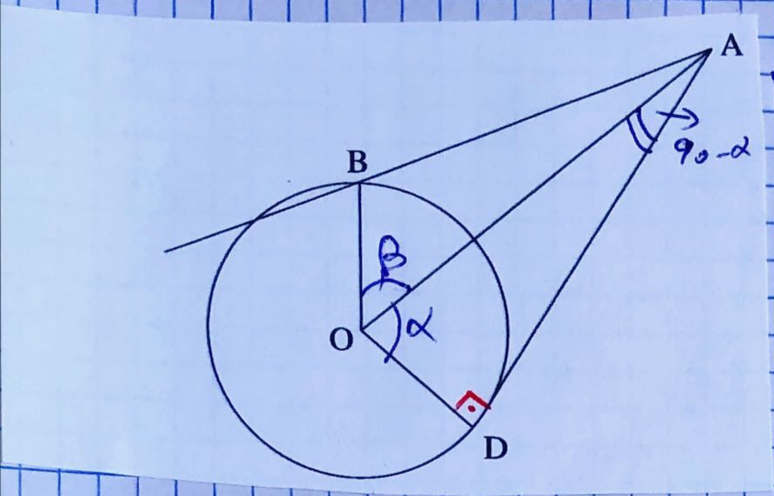
$$\Rightarrow 2\cos\beta \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha \longrightarrow \boxed{\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}}$$

((وهو المطلوب (ب))

2 بحسب المعطيات:

المثلث ADO محصور داخل دائرة نصف قطرها r و يتحقق

$$\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{8}}{5}$$



بما أن $\angle D = 90$ لذلك AO هو قطر الدائرة التي تحصر المثلث ADO لانه يقابل زاوية محيطية $\angle D = 90^\circ$

اي يتحقق $AO = 2r$ وبما أن $AO = \frac{R}{\cos\alpha}$ (حسب البند (P)) لذلك

$$2r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{8}}{5} \Rightarrow \cancel{2}\cos\alpha = \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{8}}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{5} \Rightarrow \boxed{\alpha = 55.55^\circ}$$

في البند (ب) توصلنا الى:

$$\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sin^2(55.55^\circ)}{2\cos(55.55^\circ)}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = 0.6 \Rightarrow \boxed{\beta = 53.06^\circ}$$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 6

$f(x) = \frac{x^2-36}{\sqrt{x+a}}$ a موجب

أ) بما أن a موجب لذلك مجال تعريف الدالة

هو $x+a>0 \Longleftarrow \boxed{x>-a}$

ب.1) بما انه للدالة لا يوجد خطوط تقارب معامدة للمحورين اذاً هذا معناه انه في النقطة التي فيها المقام يساوي صفر فالبسط ايضاً صفر وهذه النقطة عبارة عن ثقب.

البسط = 0 شرط تحقق :

$x^2-36=0 \rightarrow x^2=36 \rightarrow \boxed{x=\pm 6}$

أي اما $a=6$ او $a=-6$ ولكن بما ان

a براميتر موجب اذاً $\boxed{a=6}$

ب.2) الدالة هي $f(x)=\frac{x^2-36}{\sqrt{x+6}}$ ومجال التعريف $\boxed{x>-6}$

تقاطع مع $x \Leftarrow y=0$

$0=\frac{x^2-36}{\sqrt{x+6}}$

$0=x^2-36 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6$ أو $\underline{x=-6}$
ثقب

التقاطع مع x : $\boxed{(6,0)}$

تقاطع مع y : $\rightarrow x=0 \Longleftarrow f(0)=\frac{0^2-36}{\sqrt{6}}$

$\frac{-36}{\sqrt{6}}=-6\cdot\sqrt{6}$ $(0,-6\sqrt{6})$

www.l3smart.co.il

$$f(x)=\frac{x^2-36}{\sqrt{x+6}}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x+6}-\frac{1}{2\sqrt{x+6}}\cdot(x^2-36)}{x+6}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x+6}-\frac{x^2-36}{2\sqrt{x+6}}}{x+6}$$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{x+6}-(x^2-36)}{2(x+6)\cdot\sqrt{x+6}}$$

$$f'(x)=\frac{4x(x+6)-x^2+36}{2(x+6)\cdot\sqrt{x+6}}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+24x-x^2+36}{2(x+6)\cdot\sqrt{x+6}}=\frac{3x^2+24x+36}{2(x+6)\sqrt{x+6}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3(x^2+8x+12)}{2(x+6)\sqrt{x+6}}}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow 3(x^2+8x+12)=0$$

$$x^2+8x+12=0$$

$\boxed{x_1=-2}$ $\boxed{x_2=-6}$

تقب

بما ان المقام دائماً موجب (تحت مجال التعريف) لذلك
اشارة المشتقة الثانية في نقطة الشك تحدد
حسب مشتقة البسط.

$$f''_{\text{البسط}}(x)=(3x^2+24x+36)'$$

$$=6x+24$$

$$f''(-2)=6\cdot(-2)+24=12>0 \Longrightarrow \underset{\text{מינימום}}{x=-2}$$

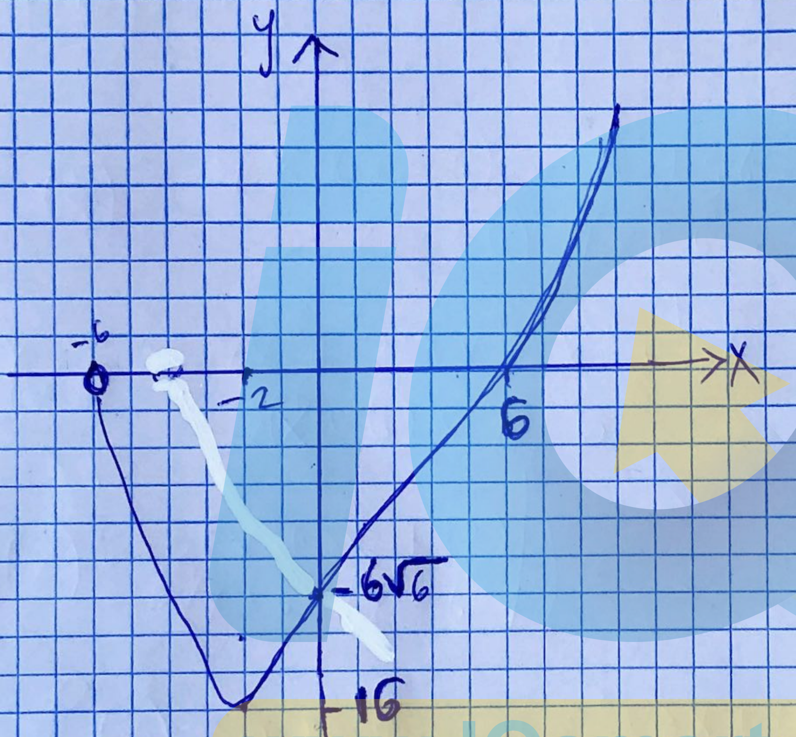
نجد الاحداثي y للنقطة

$$f(x) = \frac{x^2-36}{\sqrt{x+6}}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2-36}{\sqrt{-2+6}} = \frac{+4-36}{\sqrt{4}} = \frac{-32}{2} = -16$$

اذاً: $\boxed{(-2,-16) \text{ מינימום}}$

4. ج



www.IQsmart.co.il

د. $g(x) = -f(x+3)$ $\quad$ $h(x) = |f(x)|$

مجال تعريف الدالة $h(x)$

الدالة $h(x)$ تعرف بنفس المجال الذي فيه

الدالة $f(x)$ تعرف اي $x > -6$

مجال تعريف $g(x)$

الدالة $g(x)$ عبارة عن الدالة المعاكسة للدالة

الناتجة من ازاحة الدالة $f(x)$ 3 وحدات الى

اليسار ، ($f(x+3)$ ازاحة لـ $f(x)$ 3 وحدات الى اليسار)

وبالتالي مجال تعريف $g(x)$ هو

$x > -6-3 \Rightarrow \boxed{x > -9}$

للتلخيص

مجال تعريف $g(x) \Leftarrow x > -9$

مجال تعريف $h(x) \Leftarrow x > -6$

$\boxed{2.ج}$ بما أن $g(x)$ هي دالة الناتجة من ازاحة الأفقية بـ 3 وحدات الى اليسار ومن ثم نضرب بـ -1 لذلك الاحداثي y للنقطة القصوى سيكون معاكس الاحداثي y للنقطة القصوى للدالة f أي $16 \Leftarrow -(-16)$

والاحداثيات النقطة القصوى لـ g هي $(-2-3, 16)$ أي $(-5, 16)$

بما أن $h(x) = |f(x)|$ اذاً الاحداثي X للنقطة القصوى لن يتغير والاحداثي y للنقطة القصوى هو $16 \Leftarrow |-16|$ وبالتالي:

$\boxed{\text{الدالتين نفس الاحداثي } y \text{ للنقطة القصوى العظمى}}$

د. بحسب المعطى يتحقق:

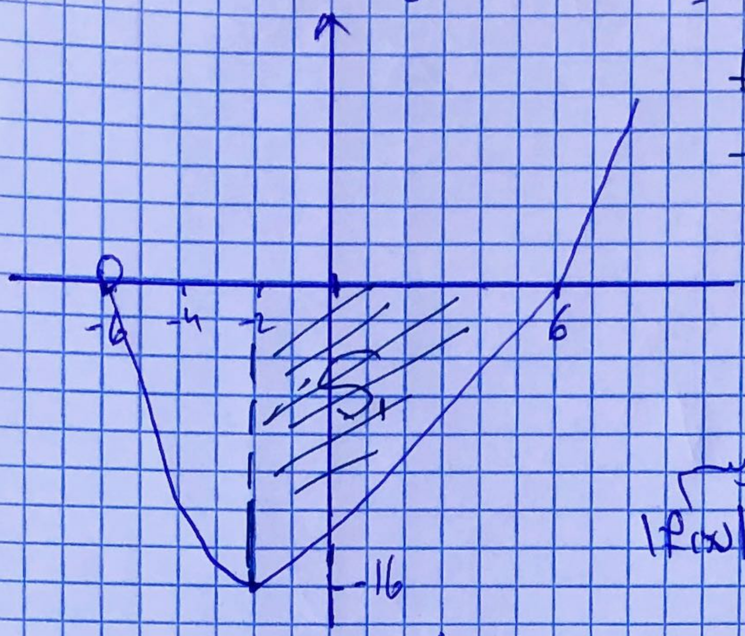
$$K > -5 \qquad \int_{-2}^{6} h(x)\,dx = \int_{-5}^{K} g(x)\,dx$$

بحيث $h(x) = |f(x)|$ و $g(x) = -f(x+3)$

سنجد قيمة K بواسطة الرسم البياني لـ $h(x)$ و $g(x)$ و $f(x)$

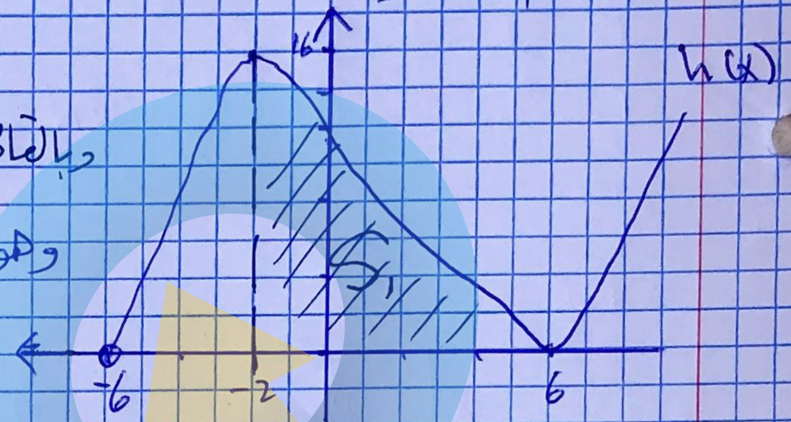
$\Longleftarrow$

بحسب البند (4ب) الرسم البياني لـ $f(x)$ هو



S_1 هو المساحة بين $f(x)$
والمحور x في المجال $-2 \le x \le 6$
اي من النقطة القصوى
الى نقطة التقاطع مع x

بالاعتماد على رسم $f(x)$ نرسم
الرسم البياني لـ $|f(x)| = h(x)$

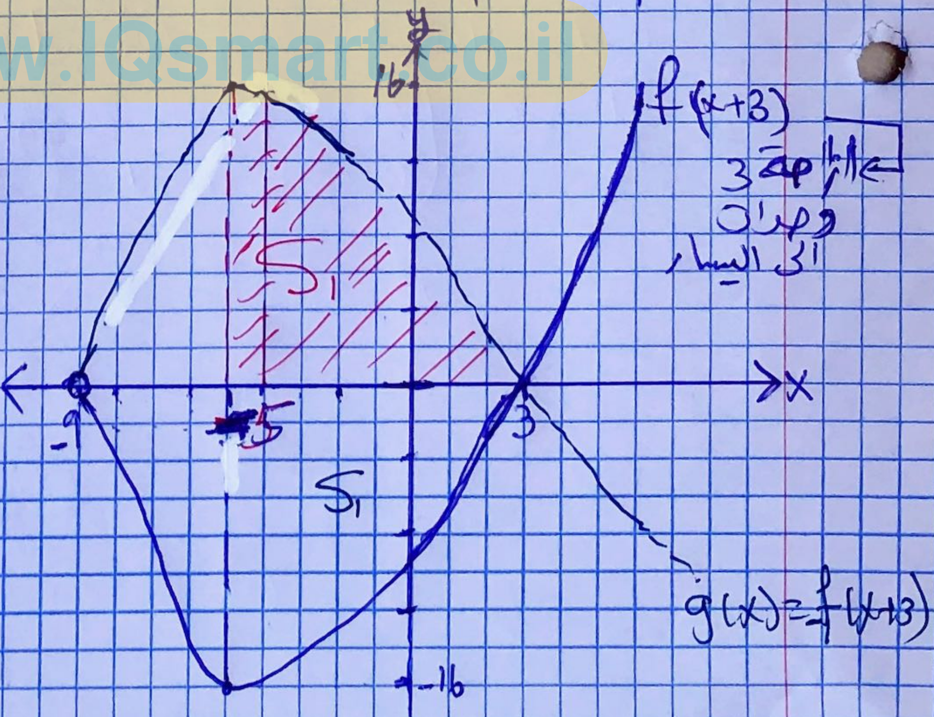


وبالتالي $\int_{-2}^{6} h(x)dx$ هو S_1

وهو عبارة عن المساحة المحصورة
بين الدالة والمحور x من النقطة
القصوى $x=-2$ ومن النقطة
الصفرية $x=6$.

بالاعتماد على الرسم لـ $f(x)$
نرسم الرسم البياني $f(x+3)$ و $g(x) = -f(x+3)$

$$\int_{-5}^{K} g(x)\,dx = S_1$$



وهو المساحة المحصورة
بين الدالة $g(x)$ من النقطة
القصوى ومن النقطة
الصفرية $x=3$

ولذلك $\boxed{K=3}$

www.IQsmart.co.il

حل سؤال 7

$$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 1$$

أ) نحسب المطابقة

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

إذاً:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= -\cos(2x)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن الدالة $f(x)$ بشكل مطابق كالتالي

$$f(x) = -\cos 2x - 1$$

$$f(-x) = -\cos(-2x) - 1 = -\cos 2x - 1 = f(x)$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

إذاً الدالة $f(x)$ زوجية لأنها تحقق $f(-x) = f(x)$ لكل x .

ب) بما أن $-1 \le \cos 2x \le 1$ لذلك $-1 \le -\cos 2x \le 1$

وبالتالي

$$-1 - 1 \le -\cos 2x - 1 \le 1 - 1$$
$$-2 \le \underbrace{-\cos 2x - 1}_{f(x)} \le 0$$

وهو المطلوب

ج) تقاطع مع x $\leftarrow$ $y = 0$

$$0 = -\cos 2x - 1 \Longrightarrow \cos 2x = -1$$

$$-2x = \pi + 2\pi k \qquad 2x = \pi + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

في المجال $-\pi \le x \le \pi$ الحلول هي $\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) / \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}$

www.IQsmart.co.il

تقاطع مع y $\Leftarrow$ $x=0$

$$f(0) = -\cos 2\cdot 0 - 1 = -1-1 = -2$$

تقاطع مع y $\longrightarrow$ $(0,-2)$

د. بحسب نتائج البنود السابقة:

* الدالة زوجية

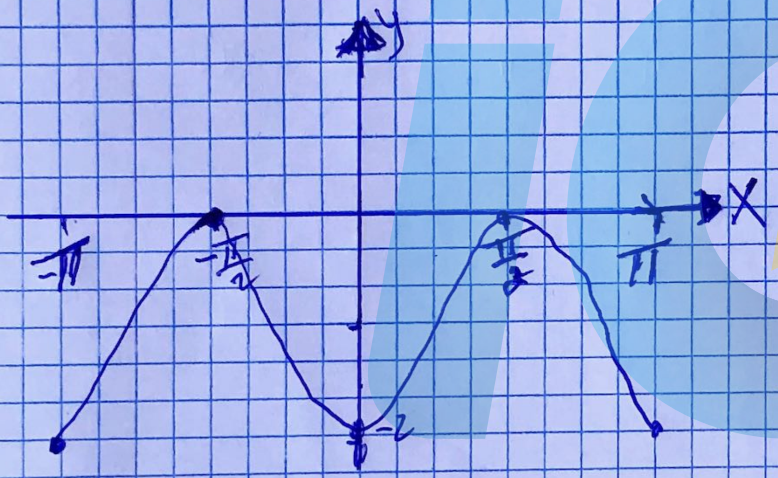
* تقاطع مع المحاور $(0,-2)$ $(\frac{\pi}{2},0)$ $(-\frac{\pi}{2},0)$

نجد قيمة الدالة بالأطراف:

$$f(-\pi)=f(\pi) = -\cos 2\cdot\pi - 1 = -1-1 = -2$$

$(-\pi,-2)$ $(\pi,-2)$

الرسم البياني للدالة:



www.IQsmart.co.il

ه. معطى أن $g(x)=f(2x)$

للدالة $f(x)$ يوجد 3 نقاط قصوى محلية $x=-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2}$

ونقطتين قصوى في الأطراف $x=-\pi,\pi$

النقاط القصوى لـ $g(x)$ تحقق:

$2x=-\frac{\pi}{2}$; $\boxed{x=-\frac{\pi}{4}}$; $\boxed{(-\frac{\pi}{4},0)}$ مكسيمום

$2x=0$; $\boxed{x=0}$; $\boxed{(0,-2)}$ מינימום

$2x=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}$; $\boxed{(\frac{\pi}{4},0)}$ مكسيمום

$2x=-\pi$; $x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(-\frac{\pi}{2},-2)}$ מינימום

$2x=\pi$; $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},-2)}$ מינימום

هـ. معطى أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x))\,dx = S$$

$$\Downarrow$$

$$\left[g(x) - f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = S$$

الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ زوجيتين أي متماثلتين بالنسبة للمحور y وهذا معناه أن التكامل المحدود المعطى في المجال $0 \le x \le \frac{\pi}{8}$ مساوٍ للتكامل المحدد في المجال المماثل بسبب كون الدالتين زوجيتين

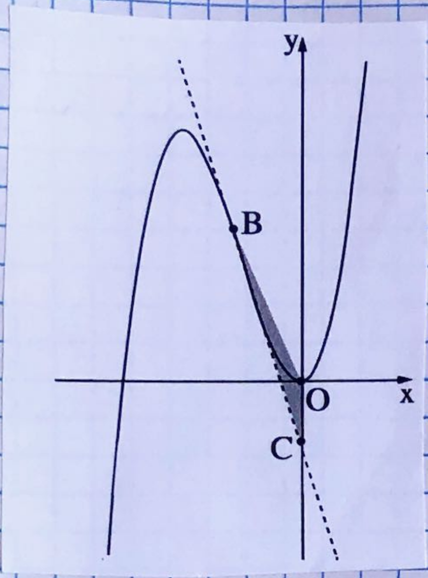
أي نتحقق أن

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} (g'(x) - f'(x)) = \left[g(x) - f(x)\right]_{-\frac{\pi}{8}}^{0} = S$$

إذاً

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} (g'(x) - f'(x)) = S}$$

www.IQsmart.co.il



حل سؤال 8

أ-

$$f(x)=x^3+12x^2$$

إحداثيات النقطة B من الصورة

$(t<0)$ $B:(t, t^3+12t^2)$

ميل المماس $= f'(t)$

$$f'(x)=3x^2+24x$$

$$f'(t)=3t^2+24t$$

معادلة المماس من الصورة $y=mx+n$

$$m=3t^2+24t$$

نعوض النقطة B ونجد n.

$$t^3+12t^2=(3t^2+24t)\cdot t+n$$

$$t^3+12t^2=3t^3+24t^2+n \Rightarrow t^3-3t^3+12t^2-24t^2=n$$

$$\boxed{-2t^3-12t^2=n}$$

بالتالي، معادلة المماس هي

$$y=(3t^2+24t)\cdot x-2t^3-12t^2$$

ب- C هي تقاطع المماس مع المحور x ولذلك إحداثيات النقطة C من الصورة $(0, 2t^3-12t^2)$

ويتحقق:

$$2t^3-12t^2<0$$

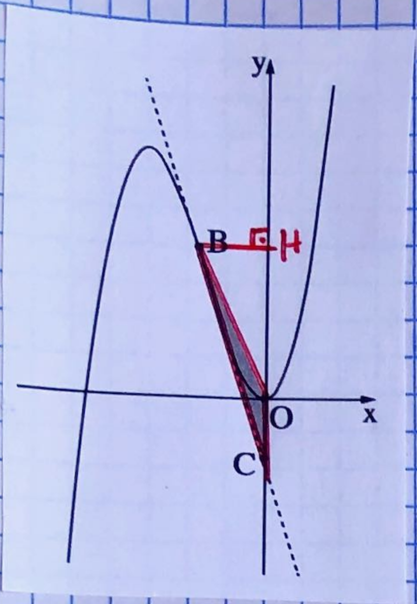
$$\Rightarrow \underbrace{t^2}_{\text{موجب دائماً}}(-2t-12)<0 \Rightarrow -2t-12<0$$

$$\boxed{-6<t}$$

وبما أن $(t<0)$ حسب البند أ، مجال t هو:

$$\boxed{-6<t<0}$$

www.IQsmart.co.il



ب. نعتبر OC قاعدة المثلث
والارتفاع النازل على OC هو العمود
النازل من B على امتداد OC.
الارتفاع هو BH (انظر الرسم)

طول BH هو الاحداثي x للنقطة B
أي t ولكن بما أن t سالب
لذلك الارتفاع هو $-t$

$$\boxed{BH = -t}$$

طول القاعدة OC هو الاحداثي y للنقطة C
ولكن بما أن الاحداثي y سالب لذلك طول OC هو:

$$OC = -(-2t^3 - 12t^2) = 2t^3 + 12t^2$$

$$\boxed{OC = 2t^3 + 12t^2}$$

$$S = \frac{BH \cdot OC}{2} = \frac{-t(2t^3 + 12t^2)}{2}$$

$$S_\Delta = \frac{-2t^4 - 12t^3}{2} = -t^4 - 6t^3$$

$$\boxed{S_\Delta = -t^4 - 6t^3}$$

$$S'_{(t)} = -4t^3 - 18t^2 = 0 \Rightarrow t^2(-4t - 18) = 0$$

$\times\ \boxed{t = 0}$ $\boxed{t = -4.5}$

$$S''(t) = -12t^3 - 36t = -12t(t^2 - 36) = -12(-4.5)(4.5^2 - 36) < 0$$

$+$ $-$

$\boxed{\text{لذلك } t = -4.5 \text{ מקסימום}}$

$$S(-4.5) = -(-4.5)^4 - 6(-4.5)^3 = \boxed{136.6875}$$

أكبر مساحة