حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد (ب) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في موعد (ب) كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

أ. بحسب المعطيات:

a_n متوالية حسابية فرقها $d=6$

وتحقق:

$$a_1 \cdot a_4 = (a_2)^2$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot (a_1+3d) = (a_1+d)^2 \Rightarrow a_1 \cdot (a_1+\overset{18}{3\cdot 6}) = (a_1+6)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^2}+18a_1 = \cancel{a_1^2}+12a_1+36 \Rightarrow 18a_1-12a_1=36$$

$$6a_1 = 36 \Rightarrow \boxed{a_1=6}$$

ب. معطى أن الحد الاخير في المتوالية هو 600 . اي يتحقق

$$a_n = 600 \Rightarrow a_1+(n-1)d = 600$$

$$\Rightarrow 6+(n-1)\cdot 6 = 600 \xRightarrow{:6} 1+(n-1)\cdot 1 = 100$$

$$\Rightarrow n-1 = 100-1 \Rightarrow n-1 = 99 \Rightarrow n = 99+1 = 100$$

$$\boxed{n=100}$$

عدد حدود المتوالية هو 100

ج. 1. نحو كل حد رابع في المتوالية اي الحدود: $\overset{A_1}{a_4}, \overset{A_2}{a_8}, \overset{A_3}{a_{12}}, \ldots$

الحدود التي نحسبها عبارة عن متوالية حسابية فيها

الحد الأول هو a_4 وفرقها $4d$ $(D=4d)$

اذاً المتوالية الجديدة التي نحسبها فرقها $4\cdot 6 \Rightarrow D=\boxed{24}$

وحدها الاول هو $a_1+3d \Rightarrow 6+\overset{18}{3\cdot 6} \Rightarrow A_1=\boxed{24}$

عدد حدود المتوالية الجديدة هو $\frac{100}{4} = \boxed{25} = N$

$$\boxed{\text{مجموع الحدود التي نحسبها}} = \frac{N}{2}\cdot\left[2A_1+(N-1)\cdot D\right] = \frac{25}{2}\left[\overset{48}{2\cdot 24}+\overset{24}{(25-1)}\cdot 24\right]$$

$$= 12.5[48+576] = \boxed{7800}$$

ج. 2

مجموع الحدود التي تمحيت - مجموع حدود الاصلية = مجموع الحدود المتبقية

$\underbrace{\text{مجموع الحدود التي تمحيت}}_{7800}$

نجد مجموع الحدود في المتوالية الاصلية :-

$$S_{100} = \frac{100}{2}\left[2\cdot 6 + (\overset{99}{100-1})6\right] = 50[12+594]$$

$$S_{100} = 30300$$

مجموع الحدود المتبقية $= 30300 - 7800 = \boxed{22500}$

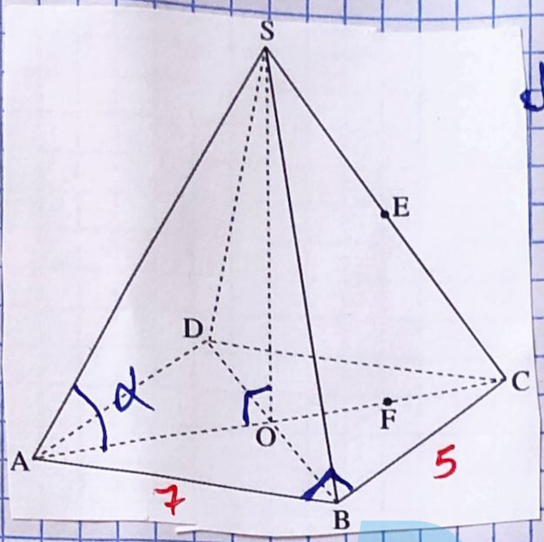
حل سؤال 2

بحسب المعطيات:

* SABCD هرم قائم قاعدته مستطيل

** SO هو ارتفاع الهرم اي ان النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة بالقاعدة وهي نقطة التقاء اقطار المستطيل.

*. حجم الهرم 140 سم³



أ- حجم الهرم $= \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot SO$

$$\Rightarrow 140 = \frac{SO \cdot \overset{35}{5 \cdot 7}}{3} \Rightarrow SO = \frac{140 \cdot 3}{35} = 12$$

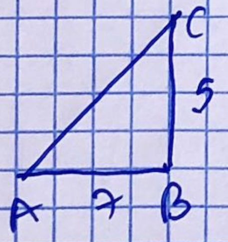
$$\boxed{SO = 12}$$

ب- الزاوية بين ضلع جانبي وقاعدة الهرم هي $\measuredangle SAC = \alpha$

(كل الزوايا بين اي ضلع جانبي وقاعدة الهرم متساوية)

لكي نجد α علينا اولاً ان نجد AO وعندها في المثلث القائم SOA يمكننا ايجاد α

$AO = \frac{AC}{2}$ ← نجد قطر القاعدة (المستطيل ABCD) ومن ثم نجد طول AO.

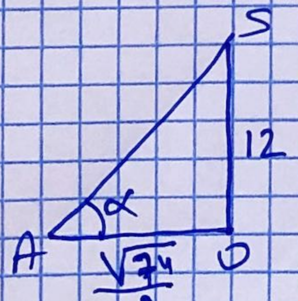


$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$$

$$AC^2 = 74 \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{74}}$$

$$\Rightarrow \boxed{AO = \frac{\sqrt{74}}{2}}$$

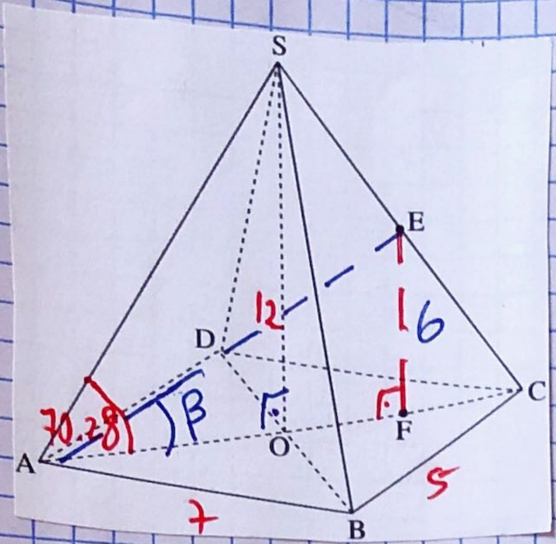
في المثلث AOS يتحقق:



$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{12}{\frac{\sqrt{74}}{2}} \Rightarrow tg\alpha = \frac{24}{\sqrt{74}} = 2.79$$

$$\boxed{\alpha = 70.28}$$

ب- SA هو ضلع جانبي في الهرم.



في المثلث SOA يتحقق:-

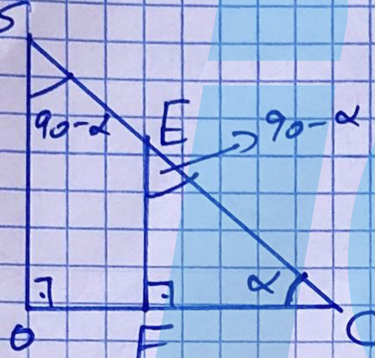
$$\sin(70.28) = \frac{12}{SA}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{12}{\sin(70.28)} = 12.748$$

$$\boxed{SA = 12.748}$$

ت.1 بحسب المعطيات E منتصف SC و F نقطة على AC

بحيث $EF \perp AC$



المثلث EFC يشابه المثلث SOC

و EF يوازي SO لأن:-

$\measuredangle O = \measuredangle F = 90°$ متناظرة

وبما أن E منتصف SC لذلك

F منتصف OC ونستنتج ان EF قاعدة وسطى

في المثلث SOC وبالتالي $EF = \frac{SO}{2} \Rightarrow EF = \frac{12}{2} = 6$

اذاً: $\boxed{EF = 6}$

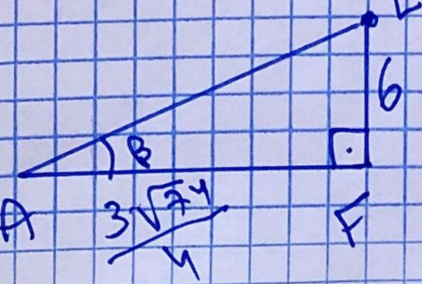
ت.2 الزاوية بين AE وقاعدة الهرم هي $\measuredangle EAF = \beta$ (أنظر الرسم)

F هي منتصف OC ولذلك يتحقق:

$$OF = \frac{OC}{2} \Rightarrow OC = OA \Rightarrow OF = \frac{\frac{\sqrt{74}}{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{74}}{4}}$$

اذاً

$$AF = AO + OF = \frac{\sqrt{74}}{2} + \frac{\sqrt{74}}{4} = \frac{3\sqrt{74}}{4}$$



في المثلث AEF يتحقق:-

$$tg\beta = \frac{EF}{AF} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{74}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{74}} = 0.93 \Rightarrow tg\beta = 0.93$$

$$\boxed{\beta = 42.92}$$

حل سؤال 3

$-\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ $\quad f(x) = 2 - 4(\sin x)^2$

أ. تقاطع مع المحور x $\leftarrow y=0$

$0 = 2 - 4\sin^2 x \Rightarrow 4\sin^2 x = 2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ او $\sin x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

I $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k}$ و III $\boxed{x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k}$

او $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ او $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k$

II $\boxed{x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k}$ IV $\boxed{x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k}$

نفحص الحلول التي ضمن مجال تعريف الدالة $-\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$

I $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k}$

$k=0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow x = 2\frac{1}{4}\pi$ ✗ خارج المجال

$k=-1 \Rightarrow x = -1\frac{1}{4}\pi$ ✗ خارج المجال

II $\boxed{x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k}$

$k=0 \rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$

$k=1 \rightarrow x = 2\frac{3}{4}\pi$ ✗ خارج المجال

$k=-1 \rightarrow x = -1\frac{1}{4}\pi$ ✗

او

III $\boxed{x = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k}$

$k=0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

$k=1 \rightarrow x = 1\frac{3}{4}\pi$ ✗ خارج المجال

$k=-1 \rightarrow x = -2\frac{1}{4}\pi$ ✗

IV $\boxed{x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k}$

$k=0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ✗ خارج المجال

$k=-1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{3\pi}{4}}$

$k=-2 \quad x = -3\frac{3}{4}\pi$ ✗

اذًا نقاط التقاطع مع المحور x:

$$\boxed{\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \quad \left(-\frac{3\pi}{4}, 0\right) \quad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \quad \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)}$$

ب.

$$f(x) = 2 - 4(\sin x)^2$$

$$f'(x) = -4 \cdot \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = -4\sin 2x$$

$$f'(x) = -4\sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow -4\sin 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\rightarrow 2x = \pi k \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}k$$

k	0	1	2	-1	-2
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
			✗		✗

نفحص النقاط بواسطة المشتقة الثانية :-

$$f''(x) = -4(-2\cos 2x) = -8\cos 2x$$

$$f''(0) = -8\cos 0 = -8 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ max}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\overbrace{\cos\pi}^{-1} = 8 > 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ min}$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -8\cos(-\pi) = 8 > 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ min}$$

نجد الاحداثي y للنقاط القصوى

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 4\underbrace{\left(\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right)^2}_{1} = -2$$

$$f(0) = 2 - 4(\sin 0)^2 = 2$$

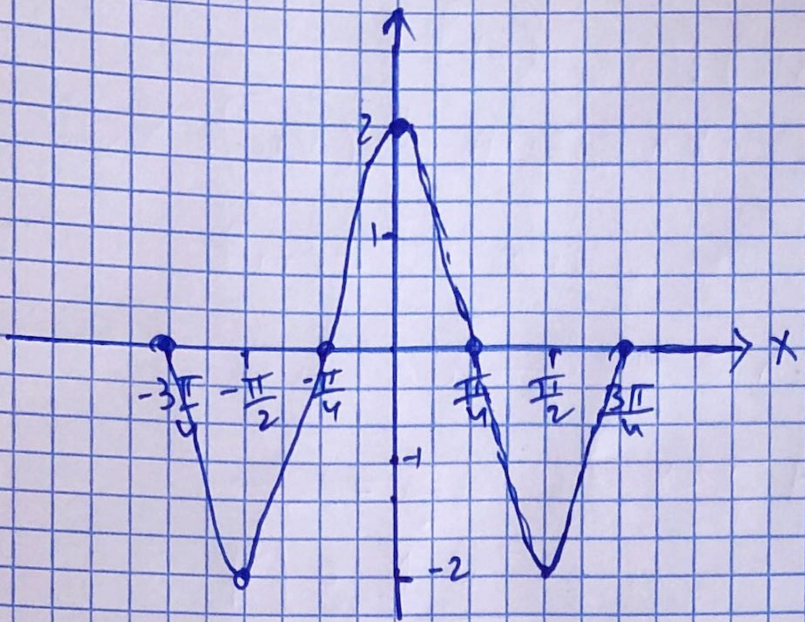
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = -2$$

$\left(-\frac{\pi}{2}, -2\right)$ min

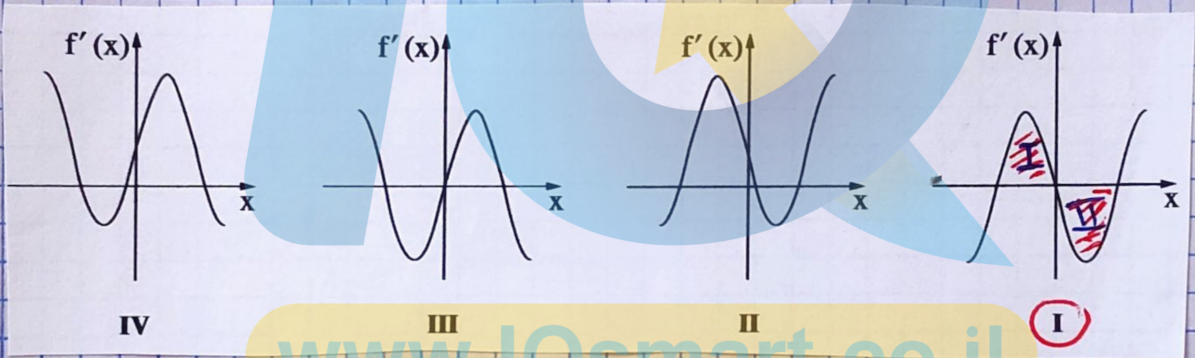
$(0, 2)$ max

$\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ min

(د)



(هـ) بحسب نتائج البنود السابقة (0,2) هي نقطة قصوى عظمى أي ان x=0 نقطة صفرية للمشتقة وقبلها الدالة تصاعدية وبعدها تنازلية أي قبل x=0 المشتقة موجبة وبعد x=0 المشتقة سالبة ← وفقط الرسم I يحقق هذه النتائج.



هـ. المساحة المحصورة بين المشتقة والمحور x هي المساحة المخططة بالرسم I. هذه المساحة عبارة عن مساحتين I و II

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=f(0)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2-(-2)=4$$

لأنها سالبة بالمجال لذلك نأخذ القيمة المطلقة ←

$$II=\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx\right|=\left|f(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|=\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)\right|=\left|\overbrace{-2-2}^{-4}\right|=4$$

$+$

8

$$\boxed{\Longrightarrow \text{المساحة المحصورة بين } f \text{ والمحور } x = 8}$$

حل سؤال 4

معرفة لكل x . $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

أ - تقاطع مع x ← $f(x)=0$

$$0 = x^2 \cdot \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{موجب دائماً}} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$$

اذاً التقاطع مع x $(0,0)$

ب- النقاط القصوى ← $f'(x)=0$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = 2xe^{-x^2} - x^2 \cdot 2x \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x^2}\left[1-x^2\right]$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x \cdot e^{-x^2} = 0$ أو $1-x^2=0$

$\boxed{x=0}$ أو $1 = x^2$

$\boxed{\pm 1 = x}$

اذاً هنالك 3 نقاط شك، نفحص النقاط حسب جدول:

x	$x<-1$ ($x=-2$)	-1	$-1<x<0$ ($x=-0.5$)	0	$0<x<1$ ($x=0.5$)	1	$x>1$ ($x=2$)
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x}\left[1-x^2\right] = \underbrace{e^{-x}}_{\text{موجب دائماً}}\underbrace{\left[2x-x^3\right]}_{f' \text{ تحدد اشارة}}$$

$f'(2) = \left[-2\cdot(+2)-(+2^3)\right] = -12 < 0$

$f'(+\frac{1}{2}) = \left[-2(+\frac{1}{2})-(+\frac{1}{2})^3\right] = \frac{3}{4} > 0$

$f(-\frac{1}{2}) = \left[-2(-\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2})^3\right] = -\frac{3}{4} < 0$

$f(-2) = \left[-2(-2)-(-2)^3\right] = -12 < 0$

$f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2} = 0.367$

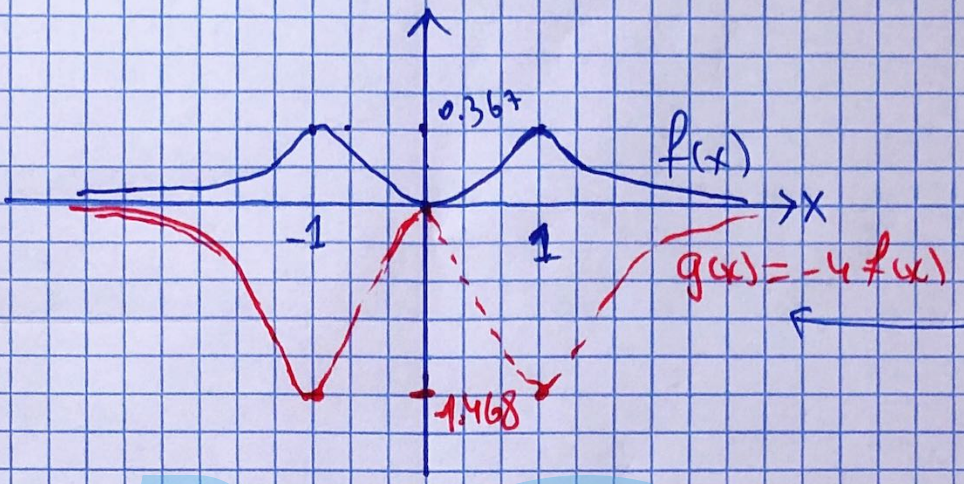
$f(0) = 0$

$f(1) = 1^2 \cdot e^{-1^2} = 0.367$

$(-1, 0.367)$	$(0,0)$	$(1, 0.367)$
max	min	max

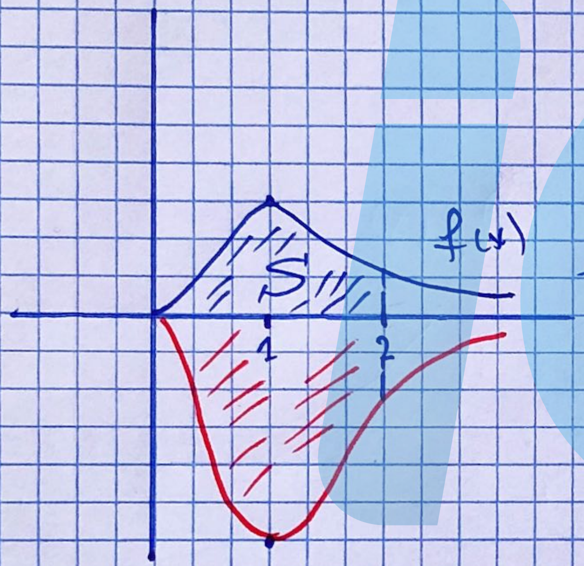
ج- مجالات تصاعدية: $x<-1$ أو $0<x<1$
مجالات تنازلية: $x>1$ أو $-1<x<0$

د)



هـ)

و)



$$S=\int_0^2 f(x)\,dx$$

اذاً:

التكامل المحدد بين الدالة g والمحور x $=\int_0^2 g(x)\,dx$

$$=\int_0^2 -4f(x)\,dx=-4\underbrace{\int_0^2 f(x)\,dx}_{S}$$

$$=-4S$$

اذاً:

$$\int_0^2 g(x)\,dx=-4S$$

وبما أنّ الدالة $g(x)$ سالبة لذلك

المساحة بين الدالة $g(x)$ والمحور x هي $|-4S| \Rightarrow 4S$

وبالتالي المساحة بين الدالتين هي:

$$4S+S=\boxed{5S}$$

حل سؤال 5

$$f(x) = c + (\ln x)^2$$

بارامتر $c > 0$

أ- مجال تعريف الدالة $x > 0$.

ب- نجد $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \longrightarrow \ln x = 0 \longrightarrow x = 1$$

$$f(1) = c + (\ln 1)^2 = c$$

نفحص النقطة حسب جدول

x	0	$0<x<1$ $x=0.5$	1	$x>1$ $x=2$
$f'(x)$	////	$-$	0	$+$
$f(x)$	////	$\searrow$	c	$\nearrow$

$$f'(0.5) = \frac{2\ln 0.5}{0.5} < 0$$

$$f'(2) = \frac{2\ln 2}{2} > 0$$

$\boxed{\text{إذاً } (1, c) \text{ נ.מינימום}}$

ج. $g(x) = 1 + \ln x$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$$

لهذه المعادلة لا يوجد حل لذلك للدالة لا يوجد نقاط قصوى، اي انها اما ان تكون تصاعدية او تنازلية على طول مجال تعريفها. نفحص اشارة المشتقة في $x=1$ ونحدد المجال

$$g'(x) = \frac{1}{1} > 0$$

أي أن الدالة تصاعدية لكل $x > 0$

د- بحسب نتائج البنود السابقة.

الدالة $g(x)$ تصاعدية لكل $x>0$ أي أن المشتقة موجبة لكل $x>0$ وبالتالي فقط الرسم I يحقق هذا الشرط

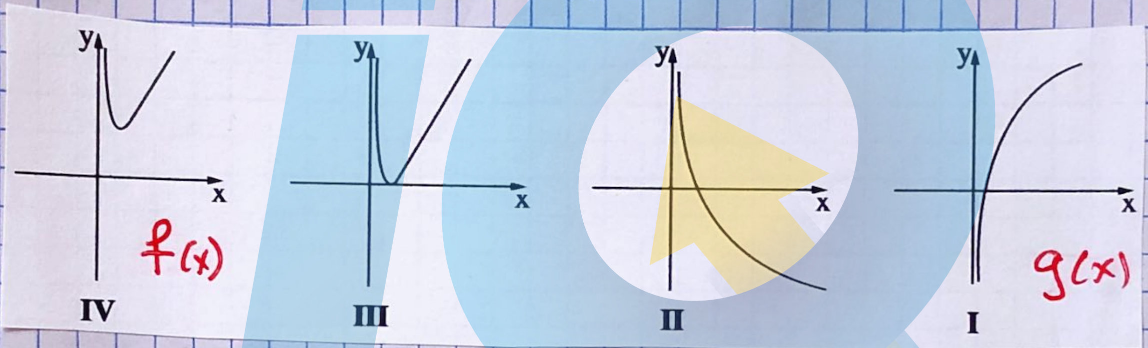
أي أن: $\boxed{g(x) \leftarrow \text{رسم } I}$

بالنسبة للدالة $f(x)$ ، $x=1$ نقطة نزول أي أن الدالة $f(x)$ تنازلية في المجال $0<x<1$ ← f' سالبة

وتصاعدية في $x>1$ ← f' موجبة

والرسم الذي يلائم هذه المعطيات هو IV وليس III

لأن النقطة الصغرى هي $(1,c)$ و c موجبة



هـ.1 بحسب المعطى $x=e$ هو الإحداثي x لواحدة من نقاط تقاطع الدالتين g و f يتحقق $g(e)=f(e)$

$$\Rightarrow f(e) = c + \ln(e)^2 = c + (1)^2 = c+1$$

$$g(e) = 1 + \ln e = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow c+1 = 2 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

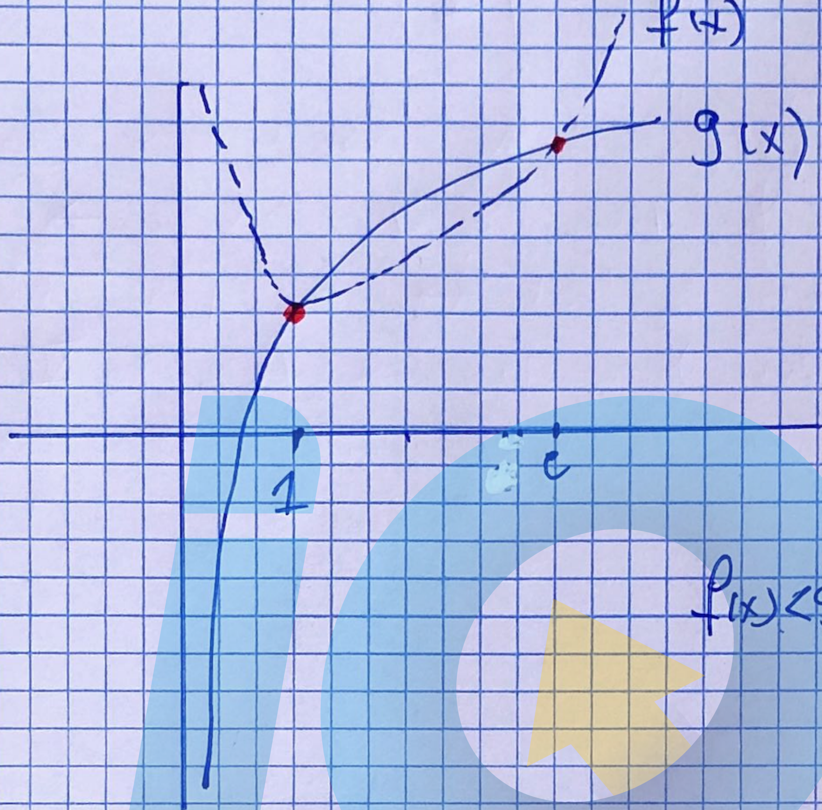
هـ.2 $f(x) = 1 + (\ln x)^2 \; // \; g(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow \cancel{1} + (\ln x)^2 = \cancel{1} + \ln x$

$$(\ln x)^2 - \ln x = 0 \Rightarrow \underset{0}{\ln x}\,\underbrace{(\ln x - 1)}_{0} = 0$$

$$\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$g(1) = 1 + \ln 1 = 1 \Rightarrow \boxed{(1,1)}$$

(م 3) بحسب نتائج البنود السابقة نرسم الرسمين البيانيين للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ ونحدد نقاط التقاطع ومن ثم نحدد المجالات التي تحقق $f(x)<g(x)$



وبحسب الرسم نلاحظ: في المجال $1<x<e$ يتحقق $f(x)<g(x)$