حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد (ب) صيف 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

مُلاحظة:

في موعد (ب) كان 3 صِيّغ (גרסאות) مُختلفة للامتحان والحل المعروض هو لإحدى هذه الصيّغ- الصيغة مُرفقة في الموقع.

حل سؤال 1

أ. * بحسب المعطيات اشترت رنا خاتمًا واحدًا واسوارتين

** سعر كل اسوارة متساوي

دفعت رنا مقابل الخاتم والأسوارتين 1805 شيكل

نفرض سعر الخاتم x

سعر الأسوارة الواحدة y

اذًا الثمن الكلي للاسوارتين والخاتم هو

$$\text{I} \quad \boxed{x+2y=1805}$$

نقدّ التخفيض الذي حصلت عليه رنا: 15% على ثمن كل اسوارة يصبح ثمن كل واحدة من الأساور:

$$(100\%-15\%)\cdot y$$

$$\Rightarrow 85\%\cdot y = 0.85y$$

وثمن الاسوارتين معًا هو: $2(0.85y)=1.7y$

ومقابل الخاتم والأسوارتين دفعت رنا مبلغ: 1613

أي تحقق:

$$\text{II} \quad \boxed{x+1.7y=1613}$$

اذًا حصلنا على معادلتين بمتغيرين (I و II)

نطرح المعادلتين:

$$\begin{array}{r} x+2y=1805 \\ -\;\; x+1.7y=1613 \\ \hline 0+0.3y=192 \end{array}$$

$$\Longrightarrow 0.3y=192$$

$$\Longrightarrow y=\frac{192}{0.3} \Longrightarrow \boxed{y=640}$$

نجد x:

$$x+2y=1805 \rightarrow x+2(640)=1805$$

$$\rightarrow x+1280=1805 \Rightarrow x=1805-1280=525$$

$\boxed{X = 525}$

إذن:

وبالتالي

$y = 640$ ثمن الاسوارة الواحدة 640 شيكل

ثمن الخاتم 525 شيكل

ب. بحسب المعطيات:

اشترت سهى من موقع الانترنت التابع للمحل خاتم بتخفيض 10% من سعره الاصلي، اي دفعت مقابل الخاتم 90% من سعره اي:

$90\% \cdot 525 = 0.9 \cdot 525 = \boxed{472.5}$

اذاً مقابل الخاتم دفعت سهى مبلغ $\boxed{472.5}$

مقابل الاساور دفعت سهى كالتالي:

مقابل الاسوارة الاولى دفعت سهى السعر الكامل اي مبلغ $\boxed{640}$ شيكل.

مقابل الاسوارة الثانية حصلت على 25% تخفيض اي دفعت مبلغ فقط 75% من 640 شيكل اي:

$0.75 \cdot 640 = \boxed{480}$

أي المجموع دفعت:

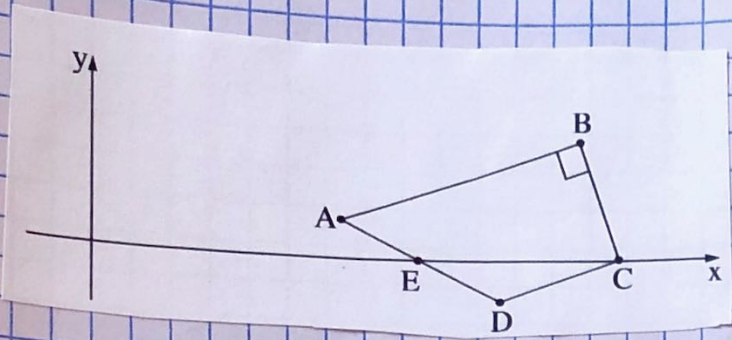
$640 + 480 + 472.5$

$\Downarrow$

$\boxed{1592.5}$ شيكل

(2)

سؤال 2



بحسب المعطيات:

ABCD شكل رباعي

الضلع AB يُعامد BC

$B:(12,3)$ $A:(6,1)$

أ.(1) ميل الضلع AB:

$$\text{ميل } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{6-12} = \frac{-2}{-6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{ميل الضلع } AB = \frac{1}{3}}$$

أ.(2) الضلع BC يعامد AB لذلك:

$$\Rightarrow \text{ميل } BC = \frac{-1}{\text{ميل } AB} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -1\cdot\frac{3}{1} = -3$$

$$\boxed{\text{ميل } BC = -3}$$

الضلع BC - معادلته من الصورة:

$y = mx + n$ $\boxed{m=-3}$

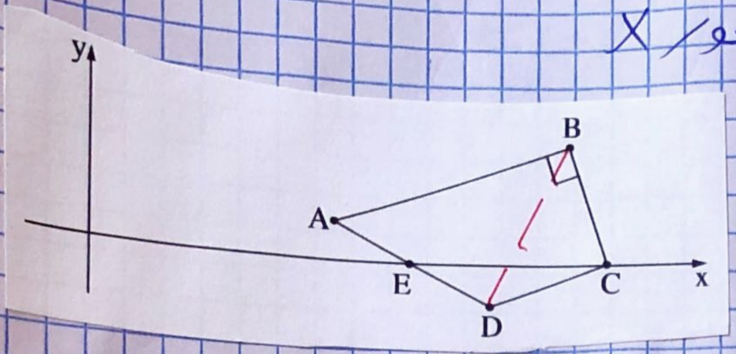
ونعوض ب $B:(12,3)$ في الصورة العامة ل BC:

$$y = mx + n$$

$$3 = -3\cdot(12) + n \Rightarrow 3 = -36 + n$$

$$\Rightarrow 3 + 36 = n \Rightarrow \boxed{39 = n}$$

$$\boxed{BC:\ y = -3x + 39}$$



ب. الرأس C يقع على المحور X

اي $C:(X_C,0)$

نعوض في معادلة BC

$$0=-3X_C+39$$

$$3X_C=39$$

$$X_C=\frac{39}{3}=13$$

$$\boxed{X_C=13}$$

$$C:(13,0)$$

ج. $E(8,0)$ $A:(6,1)$ معطى أنّ E هو منتصف AD.

نفرض $D(X_D,Y_D)$ اذا يتحقق:

$$X_E=\frac{X_A+X_D}{2} \Longrightarrow 8=\frac{6+X_D}{2} \xrightarrow{\times 2} 16=6+X_D$$

$$16-6=X_D \Longrightarrow \boxed{10=X_D}$$

$$Y_E=\frac{Y_A+Y_D}{2} \Longrightarrow 0=\frac{1+Y_D}{2} \xrightarrow{\times 2} 0=1+Y_D$$

$$\Longrightarrow \boxed{-1=Y_D} \qquad \boxed{D:(10,-1)}$$

د. لكي نبرهن أن DC يعامد BC، نبرهن أن: (ميل BC)·(ميل DC) = -1

بحسب البند (ب) ميل $BC=-3$. $C:(13,0)$, $D(10,-1)$

$$\text{ميل } DC=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1-0}{10-13}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3} \Longrightarrow \underbrace{(-3)}_{\text{ميل } BC}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)}_{\text{ميل } DC}=-1$$

ه. نبرهن أنّ $DC=BC$

$B:(12,3)$ $C(13,0)$

$$BC=\sqrt{(13-12)^2+(3-0)^2}=\sqrt{(1)^2+(3)^2}$$

$$BC=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$D(10,-1)$ $C:(13,0)$

$$DC=\sqrt{(13-10)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

اذا: $\triangle BDC$ متساوي الساقين

$$BC=DC=\sqrt{10}$$

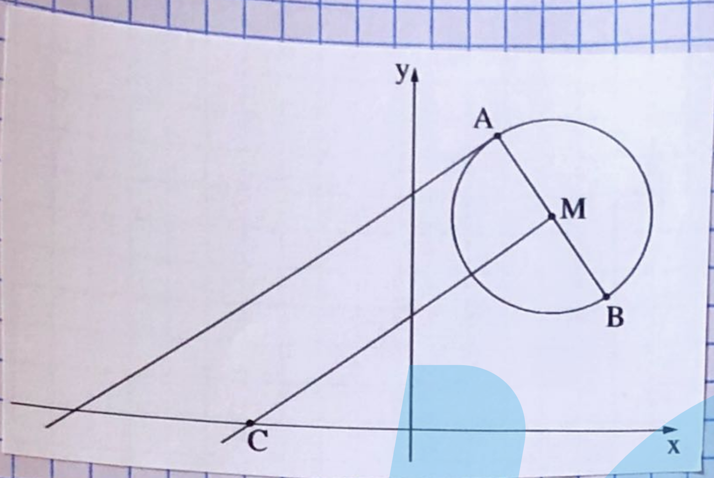
(4)

سؤال 3

بحسب المعطيات:

مركز الدائرة $M:(5,8)$

و $A:(3,11)$ تقع على محيط الدائرة



أ. (1) $AM =$ نصف قطر الدائرة

$AM=\sqrt{(5-3)^2+(8-11)^2}$

$AM=\sqrt{(2)^2+(-3)^2}$

$AM=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$$\boxed{R=AM=\sqrt{13}}$$

أ. 2 معادلة الدائرة $(x-5)^2+(y-8)^2=(\sqrt{13})^2$

$$\boxed{(x-5)^2+(y-8)^2=13}$$

ب. AB هو قطر و M مركز الدائرة لذلك النقطة M هي منتصف AB، اي يتحقق:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$	$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$
$\times 2 / \; 5=\frac{3+x_B}{2} \; /\times 2$	$\times 2 / \; 8=\frac{11+y_B}{2} \; /\times 2$
$10=3+x_B$	$16=11+y_B$
$10-3=x_B$	$16-11=y_B$
$\boxed{7=x_B}$	$\boxed{5=y_B}$

$$\boxed{B:(7,5)}$$

ج. المماس مُعامد لنصف القطر أي أن $\measuredangle A=90$

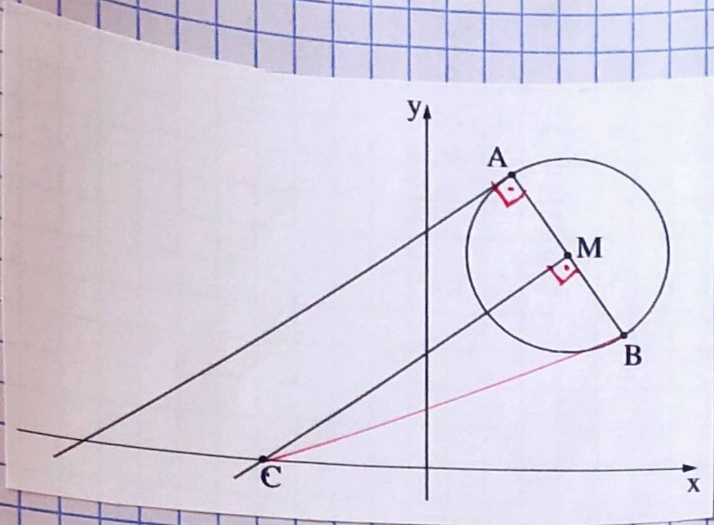
$\boxed{A:(3,11) \quad M:(5,8)}$

بما أن $-1=(\text{ميل } AM)\cdot(\text{ميل المماس})$

أو ميل المماس $=\frac{-1}{\text{ميل } AM}$ ⇐ نجد ميل AM نصف القطر

ميل $AM=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{11-8}{3-5}=\frac{3}{-2}$ ⟶ $\boxed{\text{ميل } AM=\frac{-3}{2}}$

ميل المماس $=\frac{-1}{\text{ميل } AM}=\frac{-1}{\frac{-3}{2}}=-1\cdot\left(\frac{2}{-3}\right)=\frac{2}{3}$ ⇐ $\boxed{\text{ميل المماس}=\frac{2}{3}}$



حل (1) بحسب المعطيات:

MC يوازي المماس A

لذلك:

$$\text{ميل } MC = \text{ميل المماس} = \frac{2}{3}$$

MC يمر بـ $M:(5,8)$

نجد معادلة المستقيم MC

$$MC: y = mx + n$$

$$8 = \frac{2}{3}\cdot 5 + n \Rightarrow 8 = \frac{10}{3} + n$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{10}{3} = n \Rightarrow \frac{24}{3} - \frac{10}{3} = n \Rightarrow \frac{24-10}{3} = n$$

$$\boxed{\frac{14}{3} = n}$$

وبالتالي معادلة CM هي:

$$\boxed{MC: y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}}$$

حل (2): بما أن CM يوازي المماس اذاً CM يُعامد القطر AB (لأن المماس يُعامد القطر AB)

وبالتالي المثلث BCM قائم الزاوية ($\measuredangle M = 90$)

وبالتالي مساحته هي: $\frac{CM\cdot BM}{2}$

$B:(7,5)$ $\;.M(5,8)$

النقطة C هي تقاطع CM مع المحور x ← نعوض $y=0$ في CM

$$CM: y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \Rightarrow -\frac{14}{3} = \frac{2}{3}x \quad /\times 3$$

$$\Rightarrow -14 = 2x \Rightarrow \frac{-14}{2} = x \Rightarrow \boxed{-7 = x}$$

$$\boxed{C:(-7,0)}$$

$$MC = \sqrt{(5-(-7))^2 + (8-0)^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{144+64} = \boxed{\sqrt{208}}$$

$$MB = \sqrt{(5-7)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$S_{AMBC} = \frac{MC\cdot MB}{2} = \frac{\sqrt{208}\cdot\sqrt{13}}{2} = \frac{52}{2} = \boxed{26}$$

سؤال 4

$f(x)=0.5x-6\sqrt{x}$

أ. مجال تعريف الدالة $f(x) \Leftarrow x\geq 0$

ب. تقاطع الدالة مع y ⇐ نعوض $x=0$ ⇐

$f(0)=0.5\cdot(0)-6\cdot\sqrt{0}=0-0=0$

$\boxed{\text{التقاطع مع } y \quad (0,0)}$

ج. النقطة القصوى الداخلية $f'(x)=0$

$f'(x)=0.5-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 0.5-\frac{3}{\sqrt{x}}$

$f'(x)=0.5-\frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 0=0.5-\frac{3}{\sqrt{x}}$

$0.5=\frac{3}{\sqrt{x}} \Rightarrow 0.5\sqrt{x}=3 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{0.5}$

$\Rightarrow \sqrt{x}=6 \xrightarrow{()^2} x=6^2 \Rightarrow \boxed{x=36}$

الإحداثي x للنقطة القصوى هو 6. ⇐ نعوض النقطة

ونحدد نوعها ⇐ بواسطة جدول

x	0	$0\leq x<36$ ($x=1$)	36	$x>36$ ($x=49$)
$f'(x)$	0	-2.5 (−)	0	0.07 (+)
$f(x)$		↘	min	↗

$f'(1)=0.5-\frac{3}{\sqrt{1}}=0.5-3$

$f'(1)=-2.5$

$f'(49)=0.5-\frac{3}{\sqrt{49}}=0.5-\frac{3}{7}$

$f'(49)=0.07>0$

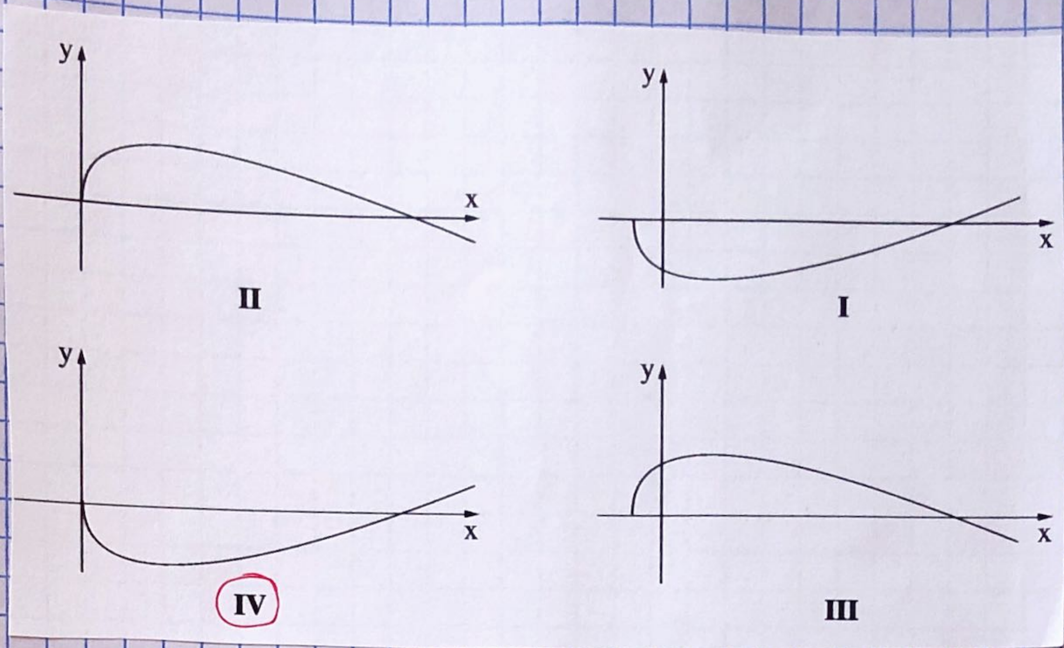
الإحداثي y للنقطة القصوى

$f(36)=0.5(36)-6\cdot\sqrt{36}$ (6)

$f(36)=18-36=-18$

إذا النقطة $(36,-18)$ هي نقطة مينيمام

٥



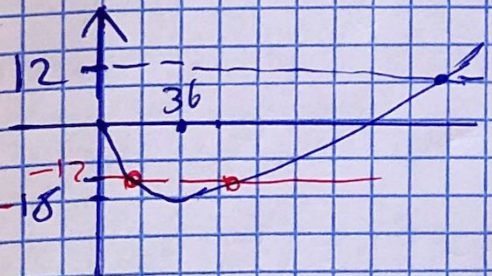
لكي نحدد الرسم الذي يلائم الدالة $f(x)$، نفحص أي رسم يحقق النتائج التي توصلنا لها بخصوص الدالة:

* الدالة تمر بـ $(0,0)$ ← الرسم III غير ملائم والرسم I غير ملائم

* النقطة $(36,-18)$ هي نهاية دنيا

وبالتالي الرسم II غير ملائم لأن الإحداثي y للنقطة القصوى موجب والنقطة هي نقطة نهاية عظمى

إذاً الرسم الملائم هو: **IV**



1. هـ $y=-12$ هو المستقيم الأحمر المبيّن بالرسم وهو يقطع الدالة في نقطتين لذلك الادعاء (1) صحيح.

2. هـ المستقيم $y=12$ المبين بالرسم يقطع الدالة في نقطة واحدة وليس في نقطتين لذلك الادعاء (2) خطأ.

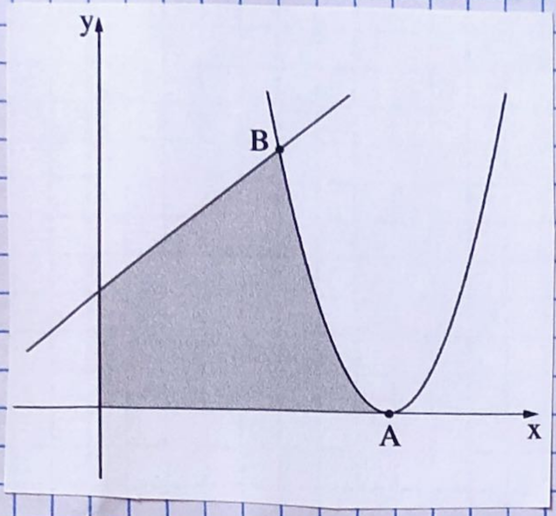
8

سؤال 5

الدالة: $f(x)=2x^2-16x+32$

المستقيم: $y=x+2$

أ (1). النقطة A تقع على المحور x، ولذلك الاحداثي y لها هو 0.



$\Rightarrow 0=2x^2-16x+32$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور:

$a=2 \mid b=-16 \mid c=32$

$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-16)\mp\sqrt{(16)^2-4\cdot2(32)}}{2\cdot2}$

$x_{1,2}=\frac{16\mp\sqrt{256-256}}{2\cdot2}=\frac{16\mp0}{4}=\frac{16}{4}=4$

$\boxed{A:(4,0)}$ اذاً

أ 2. B هي تقاطع الدالة والمستقيم $y=x+2$ اذاً يتحقق

$\Rightarrow 2x^2-16x+32=x+2 \Rightarrow 2x^2-16x-x+32-2=0$

$\Rightarrow 2x^2-17x+30=0$

وهذه معادلة تربيعية:

نحلها حسب الدستور: ← $a=2 \quad b=-17 \quad c=30$

$x_{1,2}=\frac{-(-17)\mp\sqrt{(-17)^2-4(2)(30)}}{2\cdot2}=\frac{17\mp\sqrt{289-240}}{4}$

$x_{1,2}=\frac{17\mp\sqrt{49}}{4}=\frac{17\mp7}{4}=$

$\Rightarrow$

$x_1=\frac{17-7}{4}=\frac{10}{4}=2.5$ $\qquad x_2=\frac{17+7}{4}=\frac{24}{4}=6$

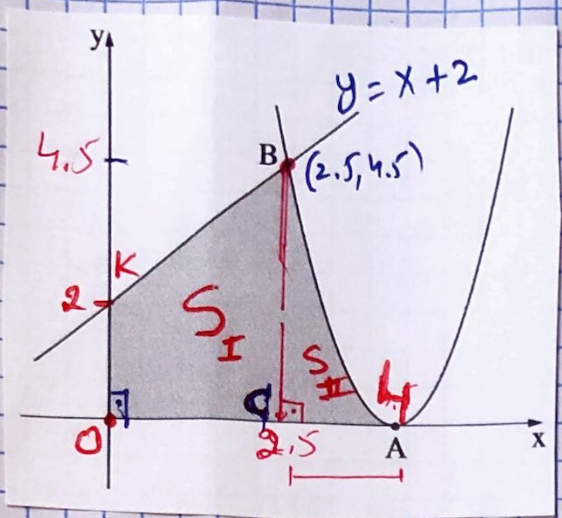
الاحداثي x للنقطة B هو الأصغر بين الاثنين أي $x=2.5$ لأن نقطة التقاطع الثانية ستكون بعد x_B الى اليمين.

نجد y_B ← نعوض في معادلة المستقيم

$x=2.5$

$y_B=2.5+2=4.5$

$\Rightarrow \boxed{B:(2.5,4.5)}$



ب- نرسم من النقطة B عموداً على المحور x
العمود يقسم المساحة الرمادية الى
مساحتين S_I و S_{II} (انظر الرسم)

المساحة S_{I} عبارة عن مساحة
شبه المنحرف OCBK.
قاعدتا شبه المنحرف هي BC و OK
طول BC هو الاحداثي y لـ B
اي $\boxed{BC=4.5}$

إحداثيات النقطة K هي نقطة تقاطع المستقيم $y=x+2$
مع محور y ($x=0$) ونستنتج الاحداثي y (من معادلة
المستقيم) $y=0+2=2$ اذاً الاحداثيات هي $K:(0,2)$
وبالتالي $\boxed{OK=2}$

ارتفاع شبه المنحرف هو OC اي $OC=2.5$

من هنا:

مساحة شبه المنحرف $= \frac{OC(OK+BC)}{2} = \frac{2.5\overbrace{(2+4.5)}^{6.5}}{2}$

$S_I \Rightarrow \frac{2.5\cdot 6.5}{2} \Rightarrow 8.125 \Rightarrow \boxed{S_I=8.125}$

S_{II} هي المساحة بين الدالة $f(x)=2x^2-16x+32$ والمحور x من $x=2.5$ الى $x=4$

$$\Rightarrow S_{II} = \int_{2.5}^{4} f(x)dx = \int_{2.5}^{4} 2x^2-16x+32\,dx = \left[2\cdot\frac{x^3}{3} - 16\frac{x^2}{2} + 32x\right]_{2.5}^{4}$$

$$= \left[\frac{2}{3}(4)^3 - \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}}(4)^2 + 32(4)\right] - \left[\frac{2}{3}\cdot(2.5)^3 - \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}}(2.5)^2 + 32(2.5)\right]$$

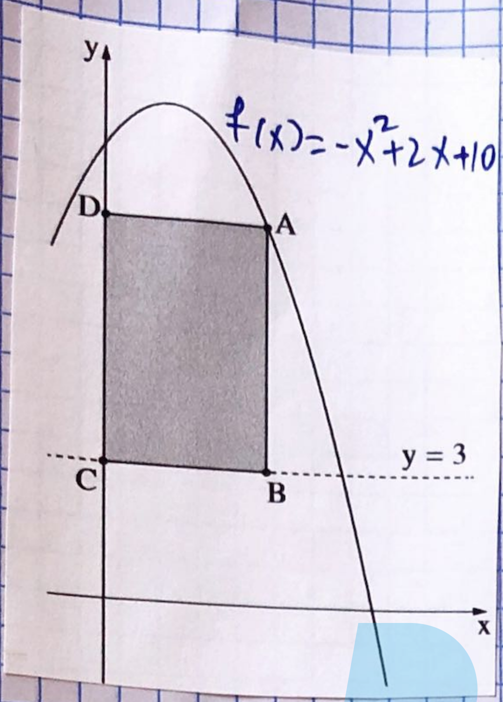
$$\underbrace{4\tfrac{2}{3} \quad -128 \quad +128}_{42\frac{2}{3}} \quad - \quad 10\tfrac{5}{12} \quad -50 \quad +80$$

$$42\tfrac{2}{3} - 40\tfrac{5}{12} = \boxed{2\tfrac{3}{12} = S_{II}}$$

$\boxed{2.25}$

المساحة الرمادية $= S_I + S_{II} = 8.125 + 2.25 = \boxed{10.375}$ ← المساحة الرمادية

حل سؤال 6



بحسب المعطيات :-

* النقطة A تقع على الدالة $f(x)$
* ABCD مستطيل أضلاعه توازي المحاور x , y .
* الضلع BC يقع على المستقيم الذي معادلته $y = 3$. أي ان الإحداثي y للنقاط B و C هو 3 . $B : (x_B, 3)$ $C : (0, 3)$

أ.1 الإحداثي ~~x~~ للنقطة A هو x_A والنقطة تقع على الدالة $f(x)$ لذلك تحقق الدالة :

$$f(x_A) = -x_A^2 + 2x_A + 10 \Rightarrow \boxed{y_A = -x_A^2 + 2x_A + 10}$$

اذاً النقطة A من الصورة :

$$\boxed{A(x_A, -x_A^2 + 2x_A + 10)}$$

أ.2 للنقطة A و B يوجد نفس الإحداثي x لذلك $B(x_A, 3)$

القطعة AB توازي للمحور y لذلك :

$$AB = y_A - y_B = -x_A^2 + 2x_A + 10 - 3 = -x_A^2 + 2x_A + 7$$

$$\boxed{AB = -x_A^2 + 2x_A + 7}$$

ب. مساحة المستطيل ABCD هي $AB \cdot BC$.

نُعبر عن طول AB و BC بدلالة x_A ونبني دالة هدف التي تعبر عن مساحة المستطيل

$$BC = x_A - 0 = x_A$$
$$AB = -x_A^2 + 2x_A + 7$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_A) = x_A \cdot (-x_A^2 + 2x_A + 7)}_{\text{دالة الهدف تعبر عن مساحة المستطيل}}$$

$$f(x_A) = x_A(-x_A^2 + 2x_A + 7)$$

$$f(x_A) = -x_A^3 + 2x_A^2 + 7x_A$$

لكي نجد أكبر مساحة نجد النقطة القصوى العظمى (مَ.ت=0) لدالة الهدف.

$$f'(x_A) = -3x_A^2 + 4x_A + 7$$

$$f'(x_A) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -3x_A^2 + 4x_A + 7 = 0$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور

$$-3x_A^2 + 4x_A + 7 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = -3 \quad b = 4 \quad c = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \mp \sqrt{4^2 - 4\cdot(-3)\cdot(7)}}{2\cdot(-3)} = \frac{-4 \mp \overbrace{\sqrt{16 + 84}}^{\sqrt{100}}}{-6} = \frac{-4 \mp 10}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 10}{-6} = \frac{-14}{-6} = 2\tfrac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{\overset{6}{-4 + 10}}{-6} = -1$$

$$\boxed{x_1 = 2\tfrac{1}{3}}$$

لا غير ملائم
لأن x_A موجب.

نُصنّف النقطة ونُبرهن أنها مَ.ت.مَ.ه.

x	$x = 0$ ($x < 2\frac{1}{3}$)	$2\frac{1}{3}$	$x = 3$ ($x > 2\frac{1}{3}$)
$f'(x)$	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f'(0) = -3\cdot 0^2 + 4\cdot 0 + 7 = 7 > 0$$

$$f'(3) = \underbrace{-3\cdot 3^2}_{-27} + 4\cdot 3 + 7 = -27 + 12 + 7 = -8 < 0$$

إنّ الإحداثي x للنقطة A التي تعطينا أكبر مساحة للمثلث
هو $\boxed{x_A = 2\tfrac{1}{3}}$