حل نموذج بجروت

)806(-581

موعد (أ) صيف 2022

طاقم الرياضيات

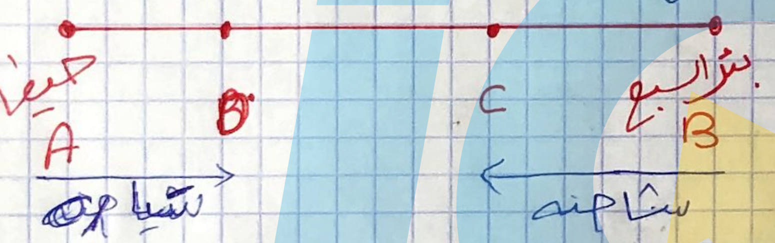
معهد IQ

ملاحظة عامة:

الامتحان في موعد صيف 2022 (أ) ظهر بـ 3 صيغات (نماذج) مختلفة . الحلول المعروضة هنا ملائمة لواحدة من هذه الصيغات (نماذج). والنموذج المعروض في موقع معهد IQ.

حل سؤال 1

نفرض ان الشاحنة توقفت في النقطة C بسبب العطل ونفرض ان السيارة تواجدت عندها في النقطة D:



نجمع المعطيات $AB=210$ $CD=96$ البعد بين السيارة والشاحنة عندما توقفت

حتى توقف الشاحنة

	سرعة	زمن	مسافة
شاحنة	V_1	t	$\overline{BC}$
سيارة	V_2	t	$\overline{AD}$

$$\overline{BC}=t\cdot V_1 \quad // \quad \overline{AD}=t\cdot V_2$$

ونتحقق

$$AD+DC+CB=210$$

$$t\cdot V_1+96+t\cdot V_2=210 \Rightarrow tV_1+tV_2=210-96$$

$$t(V_1+V_2)=114 \Rightarrow \boxed{t=\frac{114}{V_1+V_2}}$$

اذا الزمن الذي مر منذ لحظة بدء السفر وحتى توقف الشاحنة في جانب الطريق (النقطة C) هو $\frac{114}{V_1+V_2}$

ب نحسب المعطى زمن مكوث الشاحنة على جانب الطريق 1.5 مرة زمن سيرها حتى توقفت .
أي ان زمن مكوثها على جانب الطريق هو 1.5t

$$\Rightarrow 1.5t = 1.5 \cdot \frac{114}{V_1+V_2} \Rightarrow \frac{171}{V_1+V_2}$$

وكذلك معطى ان الشاحنة بدأت في التحرك مرة اخرى تماماً في اللحظة التي مرت بها السيارة أي ان زمن سير السيارة هو $\frac{171}{V_1+V_2}$, وقطعت مسافة $DC = 96$ كم

نُعبر عن كل المسافات بدلالة V_1 و V_2 ونجد النسبة بينهم :

	مسافة	زمن	سرعة	
A	$AD = \frac{114V_2}{V_1+V_2}$	$\frac{114}{V_1+V_2}$	V_2	$AD =$ شاحنة
	DC $\frac{171V_2}{V_1+V_2}$	$\frac{171}{V_1+V_2}$	V_2	DC سيارة
B	BC $\frac{114V_1}{V_1+V_2}$	$\frac{114}{V_1+V_2}$	V_1	BC شاحنة

$A \to B$ 210

وبالتالي:

$$\underbrace{\frac{114V_2}{V_1+V_2}}_{AD} + \underbrace{\frac{171V_2}{V_1+V_2}}_{DC} + \underbrace{\frac{114V_1}{V_1+V_2}}_{CB} = 210$$

$$*(V_1+V_2) \Rightarrow 114V_2 + 171V_2 + 114V_2 = 210V_1 + 210V_2$$

$$\Rightarrow 171V_2 + 114V_2 - 210V_2 = 210V_1 - 114V_1$$

$$75V_2 = 96V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{96}{75}$$

النسبة بين السرعات $\boxed{\frac{V_2}{V_1} = 1.28} \Rightarrow \boxed{V_2 = 1.28V_1}$

ج- بعد مرور 128 دقيقة من خروج الشاحنة في المرة الثانية، أي بعد توقفها، وصلت الشاحنة الى حيفا

مسافة الشاحنة من C الى A هي

من شفاعمرو الى حيفا

$$\overrightarrow{CA} \quad V_1 \cdot \frac{128}{60}$$

مسافة الشاحنة من B الى C هي

$$\overrightarrow{BC} \quad \frac{114V_1}{V_1+V_2} = \frac{114V_1}{V_1+1.28V_1} = \frac{114V_1}{2.28V_1} = 50$$

$$\Longrightarrow BC + CA = 210 = V_1 \cdot \frac{128}{60} + 50$$

$$\Longrightarrow \frac{128}{60} V_1 = 160$$

$$V_1 = \frac{160 \cdot 60}{128} = 75 \text{ كم/س}$$

$$\boxed{\text{سرعة الشاحنة } V_1 = 75 \text{ كم/س}}$$

$$V_2 = 1.28V_1 = 1.28 \cdot 75 = 96$$

$$\boxed{\text{سرعة الباص } V_2 = 96 \text{ كم/س}}$$

حل سؤال 2

أ) المتوالية I هي:

$a_1, a_2, a_3, a_4 ---$

المتوالية II هي:

$\underbrace{b_1}_{a_1}, b_2, \underbrace{b_3}_{a_2}, b_4, \underbrace{b_5}_{a_3} ---$

اي أن الحدود الجديدة هي الحدود التي في الاماكن الزوجية.

والعلاقة بين المتواليتين تحقق:

$\boxed{a_n = b_{2n-1}} \Longleftarrow$ حدود المتوالية I (a_n) هي الحدود التي في الاماكن الفردية من المتوالية a_n

المتوالية I هندسية لان اساسها $9r^2$ $\left(0<r<\frac{1}{3}\right)$

اي يتحقق: $\boxed{a_n = a_{n-1}\cdot 9r^2}$

وبشكل خاص $a_2 = a_1 \cdot 9r^2 \Longleftarrow \boxed{\frac{a_2}{a_1} = 9r^2}$

بالنسبة للمتوالية b_n الهندسية (متوالية II):

نفرض ان اساسها q اذا يتحقق

$b_n = b_{n-1}\cdot q$

وبشكل خاص $\boxed{b_3 = b_1 \cdot q^2} \Longleftarrow \boxed{\frac{b_3}{b_1} = q^2}$

بما ان $\left.\begin{matrix} b_3 = a_2 \\ b_1 = a_1 \end{matrix}\right\} \Leftarrow$ اذا يتحقق:

$\Rightarrow \frac{b_3}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = q^2 = 9r^2 \Longrightarrow \boxed{q = \pm 3r}$

بما ان المتواليات تنازليات اذا!

وبما ان $0<r<\frac{1}{3}$ اذا $0 < q = 3r < \underset{\boxed{\frac{1}{3}\cdot 3}}{1}$

2أ في البند السابق توصلنا الى ان $q=3r$

ولذلك أساس المتوالية I هو $0<9r^2<9\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\boxed{0<r<\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow 0<9r^2<9\cdot\frac{1}{9} \Rightarrow 0<9r^2<1$

اذاً المتوالية I متقاربة

أساس المتوالية II هو $q=3r$ ويتحقق

$$0<q=3r<3\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{0<q<1}$$

وبالتالي أيضاً المتوالية II متقاربة.

ب. معطى أن:

$$S_{\infty II} = \frac{4}{3} S_{\infty I}$$

$\boxed{a_1=b_1}$

$$\frac{\cancel{b_1}}{1-3r} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{a_1}}{1-9r^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{1-3r}} = \frac{4}{3\cancel{(1-3r)}(1+3r)}$$

$$3(1+3r)=4 \Rightarrow 3+9r=4$$

$$\Rightarrow 9r=1 \Rightarrow \boxed{r=\frac{1}{9}} \Rightarrow q=3r=\frac{3}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{q=\frac{1}{3}}$$

(P)

مطلوب $b_5 + b_{10} + b_{15} - - -$

معطى أن مجموع الحدود التي في الأماكن الزوجية في

المتوالية II أي $b_2 + b_4 + b_6 - - -$ هو 18

* الحدود في الأماكن الزوجية من المتوالية II هي أيضا

متوالية هندسية وقاسمها $q^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

أي ان قاسمها $\frac{1}{9}$

وبالتالي يتحقق :

$$S_{\text{زوجي II}} = \frac{b_2}{1-\frac{1}{9}} = 18$$

$$\frac{b_2}{\frac{8}{9}} = 18 \Longrightarrow \boxed{b_2 = 16} \Longrightarrow b_1 \cdot \frac{1}{3} = 16$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_1 = 48}$$

المتوالية:

$b_5, b_{10}, b_{15} - - -$

هي أيضا هندسية متقاربة قاسمها $\frac{b_{10}}{b_5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

مجموع $b_5 + b_{10} + -$ هو

$$S = \frac{b_5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{48 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{\frac{48}{81}}{1-\frac{1}{243}} = \frac{\frac{48}{81}}{\frac{243-1}{243}}$$

$$S = \frac{48}{\cancel{81}} \cdot \frac{\cancel{243}^{3}}{242} = \frac{144}{242} = \boxed{\frac{72}{121}}$$

د) الحد الخامس في المتوالية b هو

$$b_5 = 48\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

$$\boxed{b_5 = \frac{16}{27}}$$

الحدود التي تلي الحد الخامس تبدأ بالحد السادس وهي عبارة عن متوالية هندسية حدها الاول هو b_6 وأساسها $\boxed{q = \frac{1}{3}}$

$$S_{6\to} = \frac{b_6}{1-\frac{1}{3}} = \frac{b_5 \cdot q}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{16}{27}\cdot\cancel{\frac{1}{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{\frac{16}{27}}{2}$$

والنسبة المطلوبة هي:

$$\frac{b_5}{S_{6\to}} = \frac{\cancel{\frac{16}{27}}}{\frac{\cancel{\frac{16}{27}}}{2}} = 2$$

هـ) لتكن c_n متوالية هندسية متقاربة أساسها q_c

النسبة بين حد ما ومجموع كل الحدود التي تلي هذا الحد في المتوالية هو

$$\frac{c_n}{c_{n+1}+c_{n+2}+\dots} = \frac{c_n}{\frac{c_{n+1}}{1-q_c}} = \frac{c_n}{1}\cdot\frac{1-q_c}{c_{n+1}}$$

$$= \frac{\cancel{c_n}(1-q_c)}{\cancel{c_n}\cdot q_c} = \boxed{\frac{1-q_c}{q_c}}$$

وهذا التعبير لا يتعلق بـ n

أي لا يتعلق بمكان الحد.

حل سؤال 3

بحسب المعطيات:

$$P\left(\text{ان تربح ندى لعبة واحدة}\right)=3p \Leftarrow P\left(\text{تخسر ندى في لعبة}\right)=p$$

وبالتالي الاحتمال ان تتعادل في لعبة واحدة هو

$$P\left(\text{تتعادل في لعبة}\right)=1-4p$$

p. الحدث: ان تربح ندى في لعبة واحدة على الاقل هو الحدث المكمل لأن تخسر في اللعبتين.

الاحتمال ان لا تربح ندى في لعبة واحدة هو أن تخسر أو أن تتعادل في اللعبة

$$P\left(\text{ان لا تربح في لعبة واحدة}\right)=P\left(\text{ان تخسر}\right)+P\left(\text{تتعادل}\right)=p+1-4p$$

$$P\left(\text{ان لا تربح في لعبة}\right)=1-3p$$

وبالتالي

$$P\left(\text{ان تربح لعبة واحدة على الاقل من بين لعبتين}\right)=\underbrace{1-(1-3p)^2}_{\text{الحدث المكمل لان تخسر في لعبتين}}=4.5p$$

$$\Rightarrow 1-(1-6p+9p^2)=4.5p \Rightarrow 6p-9p^2=4.5p$$

$$9p^2+4.5p-6p=0 \Rightarrow 9p^2-1.5p=0$$

$$1.5p(6p-1)=0$$

$\boxed{p=0}$ غير ممكن

$$6p-1=0 \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{6}}$$

$$\boxed{P\left(\text{تربح}\right)=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}} \qquad \boxed{P\left(\text{تعادل}\right)=\frac{1}{3}}$$

ب. لعبت ندى 5 لعبات. الاحتمال ان تفوز بـ 3 لعبات على الأقل هو:

$$P(\text{تربح 3 من بين 5}) + P(\text{تربح 4 من بين 5}) + P(\text{تربح 5 من 5})$$

$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = (10+5+1)\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=16\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$$

الاحتمال ان تربح ندى 3 مباريات على الأقل من بين 5 لعبات هو $\frac{1}{2}$

ج. الاحتمال أن تفوز ندى في اللعبات الثلاث الأولى على الأقل معناه ان نتائج اللعبة الرابعة والخامسة غير مهمة في حال فازت في اول 3 ولذلك:

$$P(\text{فوز ندى في اول 3 لعبات}) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{فوز في اول 3}}\cdot\underbrace{1\cdot 1}_{\text{الرابعة والخامسة الاحتمال 1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3=\boxed{\frac{1}{8}}$$

د. في البنود السابقة توصلنا الى ان

$$P(\text{لا تخسر ندى لعبة واحدة}) = P(\text{ربح}) + P(\text{تعادل}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$P(\text{لا تخسر ندى اي لعبة من بين 5}) = \boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.42}$$

2. ل الاحتمال ان تكون نهى قد ربحت اللعبات الثلاث الأولى وحصلت على تعادل في الاخيرة مع العلم انها خسرت في لعبة واحدة فقط, معناه انها حصلت على النتائج التالية:

تعادل في الخامسة / خسارة في الرابعة / فوز في الثالثة / فوز في الثانية / فوز في الاولى

اي انه لهذا الوضع امكانية واحدة فقط

وبالتالي:

$$P\left(\text{ان تربح في اول 3 مباريات} \;\middle|\; \text{خسرت مباراة واحدة فقط}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^5} = 0.0116$$

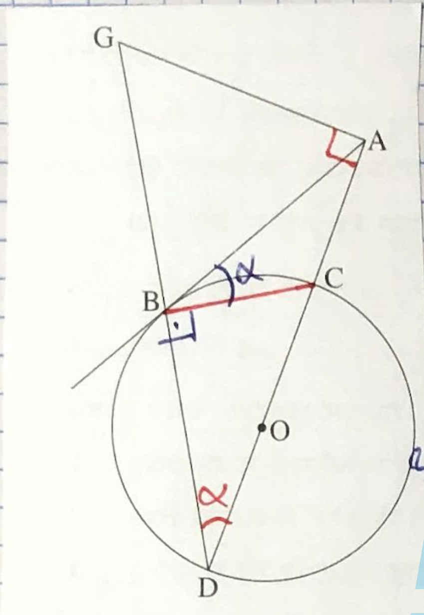
حل سؤال 4

أ. بحسب المعطيات

AB مماس الدائرة في B

$\measuredangle GAD = 90$ $(AD \perp AG)$

CD قطر في الدائرة



(1) $\measuredangle DBC = 90^\circ$ محيطية مقابلة للقطر

(2) $\measuredangle ABC = \alpha$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر تساوي المحيطية المقابلة لنفس الوتر.

(3) $\measuredangle ABG = 180-90-\alpha$ $\measuredangle GBD$ زاوية مستقيمة

$\boxed{\measuredangle ABG = 90-\alpha}$

(4) $\boxed{\measuredangle G = 90-\alpha}$ مجموع زوايا المثلث ADG هي 180°

(5) $\measuredangle GAB = 180-2(90-\alpha)$ مجموع زوايا المثلث ABG 180°

$\boxed{\measuredangle GAB = 2\alpha}$

إذاً زوايا المثلث ABG هي:

$\measuredangle G = \measuredangle ABG = 90-\alpha$

$\measuredangle GAB = 2\alpha$

وهو المطلوب

ب. مطلوب برهان أن $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$

نبرهن أن $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ وعندها نحصل على النسبة المطلوبة

$\measuredangle ABC = \measuredangle ADB = \alpha$ حسب (2)

$\measuredangle DAB = \measuredangle CAB$ زاوية مشتركة للمثلثين

حسب (ز ز)

اذاً بتشابه المثلثات ومن التشابه نستنتج

أن $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$

وهو المطلوب

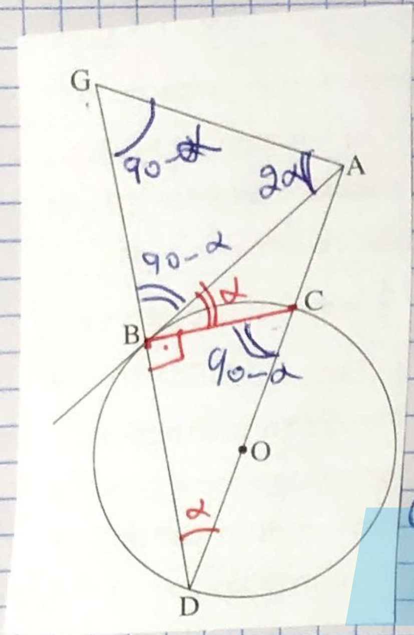
أ. معطى أن $AC=\frac{1}{2}DC$ $AG=5$

$R=?$

$DC=2R$ قطر الدائرة

اذا $AC=\frac{1}{2}\cdot 2R=R$

$\boxed{AC=R}$



مثلث فيه $AG=AB$
زاويتين متساويتين
متساوي الساقين $\Rightarrow \boxed{AB=AG=5}$

من البند (ب) يتحقق:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow \frac{5}{3R}=\frac{R}{5}$$

$$\Rightarrow 25=3R^2\Rightarrow \frac{25}{3}=R^2\Rightarrow \sqrt{\frac{25}{3}}=R$$

$$\boxed{\frac{5}{\sqrt{3}}=R}$$

وهو المطلوب

ب. نبرهن أن $\Delta ADG \sim \Delta BDC$

$\measuredangle ADG=\measuredangle BDC=\alpha$ مشتركة للمثلثين

$\measuredangle AGD=\measuredangle BCD=90-\alpha$

اذا يتشابه المثلثان حسب (ز, ز) $\Leftarrow$

ج. من البند (ب) يتحقق:

$$\frac{BD}{BC}=\frac{\overset{5}{AB}}{\underset{5/\sqrt{3}}{AC}} \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\sqrt{3}$$

$\rightarrow BD=\sqrt{3}\,BC$

في مثلث BDC القائم يتحقق:

$$BC^2+BD^2=\underset{(2R)}{DC^2}\rightarrow BC^2+(\sqrt{3}BC)^2=4R^2\Rightarrow \dots\Rightarrow \boxed{BC=R=\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\frac{S_{\Delta ADG}}{S_{\Delta BDC}}=\left(\frac{AG}{BC}\right)^2\Rightarrow \frac{S_{\Delta ADG}}{5}=\left(\frac{5}{5/\sqrt{3}}\right)^2=\underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2}_{3}\Rightarrow \boxed{S_{\Delta ADG}=35}$$

12

حل سؤال 5

أ-

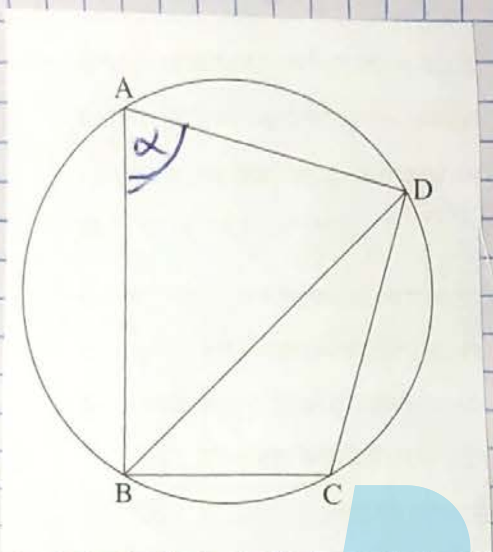
بحسب قانون ال sin:

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=2R$$

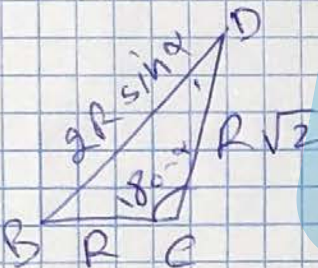
$$BD=2R\sin\alpha$$

ب- $BC=R$ $CD=\sqrt{2}R$

في ΔBDC



$\measuredangle BCD=180-\alpha$ في الشكل الرباعي المحصور داخل دائرة فمجموع كل زاويتين متقابلتين هو 180°



بحسب قانون ال cos

$$\underbrace{(BD)^2}_{(2R\sin\alpha)^2}=\underbrace{R^2}_{BC^2}+\underbrace{(R\sqrt{2})^2}_{(DC)^2}-2R\cdot R\cdot\sqrt{2}\cdot\underbrace{\cos(180-\alpha)}_{-\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow 4R^2\sin^2\alpha=R^2+2R^2+2\sqrt{2}R^2\cdot\cos\alpha$$

$$\xRightarrow{:R^2} 4\sin^2\alpha=1+2+2\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$4(1-\cos^2\alpha)=3+2\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$4-4\cos^2\alpha-3-2\sqrt{2}\cos\alpha=0$$

$$-4\cos^2\alpha-2\sqrt{2}\cos\alpha+1=0$$

$$\cdot(-1)\Rightarrow 4\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha-1=0$$

$\cos\alpha=t$

$$4t^2+2\sqrt{2}t-1=0$$

نحل المعادلة نحصل على $t_1=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $t_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

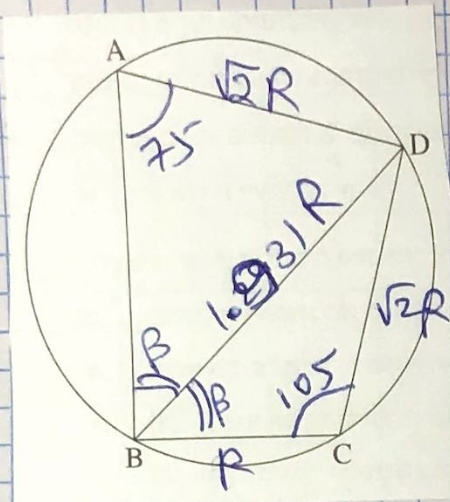
$t_1=0.9695$ $t_2=0.2588$

$\cos\alpha=-0.9695$ $\boxed{\alpha=75}$

$\alpha=165\longrightarrow$ غير ملائم لقيمة α

ب - معطى BD منصف زاوية $\measuredangle ABC$

$\measuredangle ADB = ?$



$BD = 2R\sin\alpha = 2R\sin 75$

$BD = 1.931R$

بما أن BD منصف $\measuredangle ABC$

اذاً $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC = \beta$

$\Longrightarrow BD = DC = \sqrt{2}R$

الأوتار التي تقابل زوايا متساوية في الدائرة، متساوية

في ΔABD بحسب قانون ال sin يتحقق:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = 2R \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}\cancel{R}}{\sin\beta} = 2\cancel{R}$$

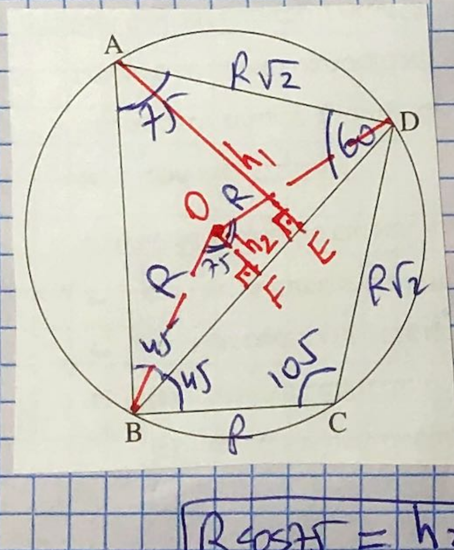
$$\Longrightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \beta = 45 \qquad // \beta = 135$$

غير ملائم

ينتج ان مجموع زوايا المثلث اكبر من 180

$$\boxed{\Longrightarrow \beta = \measuredangle ABD = 45}$$

ج. في ΔABD:



$\measuredangle ADB = 180 - 75 - 45$

$$\boxed{\measuredangle ADB = 60} \Longrightarrow \sin 60 = \frac{h_1}{R\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h_1}{R\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{h_1 = \frac{R\sqrt{6}}{2}}$$

O - مركز الدائرة:

$$\underset{\text{مركزية}}{\measuredangle O} = 2\underset{\text{محيطية}}{\overset{75}{\overbrace{\measuredangle BAD}}} = 150$$

ΔOBD متساوي الساقين

$$\Longrightarrow \measuredangle BOF = \measuredangle FOD = 75$$

في $\Delta OFB \Longrightarrow \cos 75 = \frac{h_2}{R} \Longrightarrow \boxed{R\cos 75 = h_2}$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{\cancel{R}\cdot\sqrt{6}}{2}}{\cancel{R}\cos 75} \Longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{2\cos 75} = \boxed{4.732}$$

حل سؤال 6

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x}$$

1.أ مجال تعريف الدالة $\boxed{x \neq 0}$

2.أ

$$f(-x) = 3(-x) + \frac{3}{-x} = -3x - \frac{3}{x}$$

$$= -1\left(3x + \frac{3}{x}\right) = -1 f(x)$$

اذاً $f(-x) = -f(x)$

اي ان الدالة فردية

3.أ

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{x^2} = 0 \rightarrow 3 = \frac{3}{x^2}$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{3}{3} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 + \frac{3}{1} = 6$$

وبما ان الدالة فردية اذاً

$$f(-1) = -6$$

اذاً $(1,6)$ و $(-1,6)$ نقاط شك.

نفحص النقاط:-

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$		$\searrow$	6	$\nearrow$
		max				min	

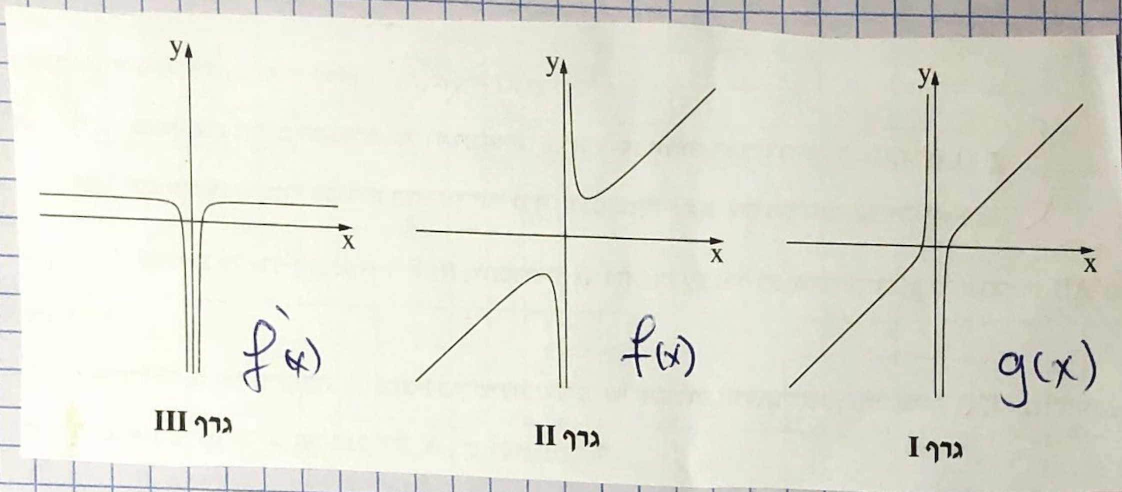
$f'(-2) = 3$ $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ $\quad f'(2) = 3$

مجالات تصاعدية
$x < -1$ // $x > 1$

مجالات تنازلية:
$-1 < x < 0$ $\quad 0 < x < 1$

ب- بحسب المعطى $g(x) = f(x) f'(x)$



من البنود السابقة استنتجنا بالنسبة للدالة $f(x)$

أن $(1,6)$ مينيموم // $(-1,-6)$ مكسيموم

ولذلك الرسم II يلائم هذه الدالة.

بحسب المجالات التصاعدية والتنازلية للدالة $f(x)$

نستنتج أن الرسم البياني الملائم لـ $f'(x)$ هو III

لأن $x=-1$ و $x=1$ هي نقاط صفرية لـ $f'(x)$.

المجالات الموجبة $x>1$ او $x<-1$ (للدالة $f'(x)$)

المجالات السالبة $0<x<1$ $-1<x<0$ (للدالة $f'(x)$)

الرسم I يلائم لـ $g(x)$ (لم يبقَ رسم غيره)

ج. $g(x)=0$ نقاط تقاطع x

$$\Rightarrow g(x) = f(x) \cdot f'(x) = 0$$

$f(x)=0$ او $f'(x)=0$

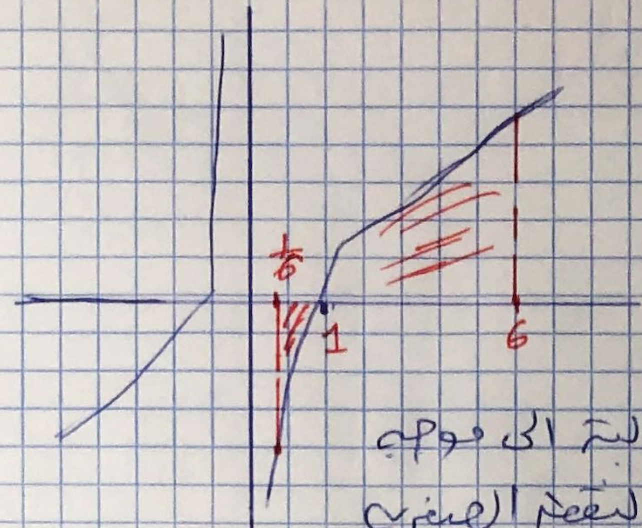
$\boxed{x=1}$ $\boxed{x=-1}$

$f(x)$: $3 + \frac{3}{x} = 0$

لا تقطع الدالة المحور x بحسب الرسم $\boxed{II}$

g(x)

III سـ 1



الدالة g(x)

في المجال

$\frac{1}{6} \le x \le 6$

تنتقل من سالبة الى موجبة

في x=1 النقطة الصفرية

ولذلك المساحة المطلوبة

$$S = \left|\int_{\frac{1}{6}}^{1} g(x)\,dx\right| + \int_{1}^{6} g(x)\,dx$$

$$\left|\int_{\frac{1}{6}}^{1} f'(x)\,f(x)\,dx\right| + \int_{1}^{6} f'(x)\,f(x)\,dx$$

$$\left|\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{6}}^{1}\right| + \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{1}^{6} = \left|\frac{f^2(1) - f^2(\frac{1}{6})}{2}\right| + \left|\frac{f^2(6) - f^2(1)}{2}\right|$$

$$= \underbrace{\left|\frac{36 - 342.25}{2}\right|}_{153.125} + \underbrace{\frac{342.25 - 36}{2}}_{153.125} = \boxed{306.25}$$

$$f^2(1) = \left(3 + \frac{3}{1}\right)^2 = 36$$

$$f^2\left(\frac{1}{6}\right) = \left(3\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{\frac{1}{6}}\right)^2 = (18.5)^2 = 342.25$$

$$f^2(6) = \left(3\cdot 6 + \frac{3}{6}\right)^2 = (18.5)^2 = 342.25$$

اذا المساحة المحصورة هي

306.25

وحدات مساحة

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{a}}^{a} = \frac{1}{2}\left[f^2(a) - f^2\left(\frac{1}{a}\right)\right]$$ - د

$$f(a) = 3a + \frac{3}{a} = \frac{3a^2+3}{a}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{3}{a} + \frac{3}{\underbrace{\frac{1}{a}}_{3a}} = \frac{3a^2+3}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3a^2+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{3a^2+3}{3}\right)^2\right] = 0$$

اذاً:

$$\boxed{\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx = 0}$$

الدالة $h(x)$ معرفة في المجال $x>1$

$$h(x) = \int_1^x f'(t)\,dt = f(t)\Big|_1^x$$ و -

بما أن الدالة $f(t)$ هي دالة موجبة وتصاعدية لكل الـ t لذلك كلما تكبر t كبرت $f(t)$ وكبر $h(t)$ من هنا للدالة $h(t)$ يوجد نقطة نهاية صغرى מינימום في طرف المجال نقطة د $h(1)=0$

$$\left[h(1) = f(t)\Big|_1^1 = 0\right]$$

اذاً $(1,0)$ מינימום لـ $h(t)$

حل سؤال 7

$$f(x)=\frac{2\cos^2x+\sin 2x}{2\cos x}$$

$0\le x\le 2\pi$

أ.1 مجال تعريف الدالة:

$\cos x\neq 0$

$x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$

$k=0 \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}$, $k=1$ $x\neq\frac{3\pi}{2}$

اذاً مجال تعريف الدالة:

$0\le x<\frac{\pi}{2}$ او $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$

أ.2

$$f(x)=\frac{2\cos^2x+\sin 2x}{2\cos x}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{2\cos^2x+2\cos x\cdot\sin x}{2\cos x}=\frac{\cancel{2\cos x}(\cos x+\sin x)}{\cancel{2\cos x}}$$

$$\Longrightarrow f(x)=\cos x+\sin x$$

الدالة $f(x)$ تحت شروط مجال تعريف الدالة: $x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

هي دالة مطابقة للدالة $f(x)=\cos x+\sin x$

ولذلك النقاط التي فيها الدالة غير معرفة هي

عملياً تحقق $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{0}{0}$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{0}{0}$

وبالتالي هي ثقب واحداثيات الثقب هي:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=0+1=1$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}=0-1=-1$

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2},1\right)\quad\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)}$$

اذاً للدالة $f(x)$ لا يوجد خطوط تقارب عمودية

لان النقاط التي فيها الدالة غير معرفة هي ثقوب

3. P التقاطع مع المحاور :

مع المحور X $y=0$

$$f(x)= \cos x+\sin x$$

$$\cos x+\sin x=0 \Rightarrow \cos x=-\sin x$$

$$\Rightarrow 1=\frac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow 1=-tg x \Rightarrow \boxed{tg x=-1}$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$$

$K=0 \rightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ خارج المجال

$K=1 \rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

$K=2 \rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

تقاطع مع x

تقاطع مع y $x=0$

$$f(0)=\cos 0+\sin 0=1$$

مع y $\boxed{(0,1)}$

ب.1) في البند (أ) 2 توصلنا الى ان الدالة $f(x)$ مطابقة للدالة $f(x)=\cos x+\sin x$

لأن x ضمن مجال تعريف الدالة : $x\neq\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

وبالتالي المشتقات متساوية:

$$f'(x)=-\sin x+\cos x$$

وبالتالي : $\boxed{f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{-\sin x}}$

ب.2. النقاط القصوى:

$$f'(x)=0$$

$$\Rightarrow -\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\sin x \Rightarrow 1=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\boxed{tg x=1} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi K$$

$K=0 \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}}$ $K=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{4}}$

نضيف النقاط ونفحص نوع الاطراف ايضا . ←

x	0	$0\le x<\frac{\pi}{4}$ ($\frac{\pi}{8}$)	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{3}$)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{4}$ (π)	$\frac{5\pi}{4}$	$<x<$ ($\frac{4\pi}{3}$)	$\frac{3\pi}{2}$	$<x<$ ($\frac{7\pi}{4}$)	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$			1
	min ق.ط		max		ليست		max				max ق.ط

$f(0)=\cos 0+\sin 0=1$

$f'(\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}>0$ $\quad f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

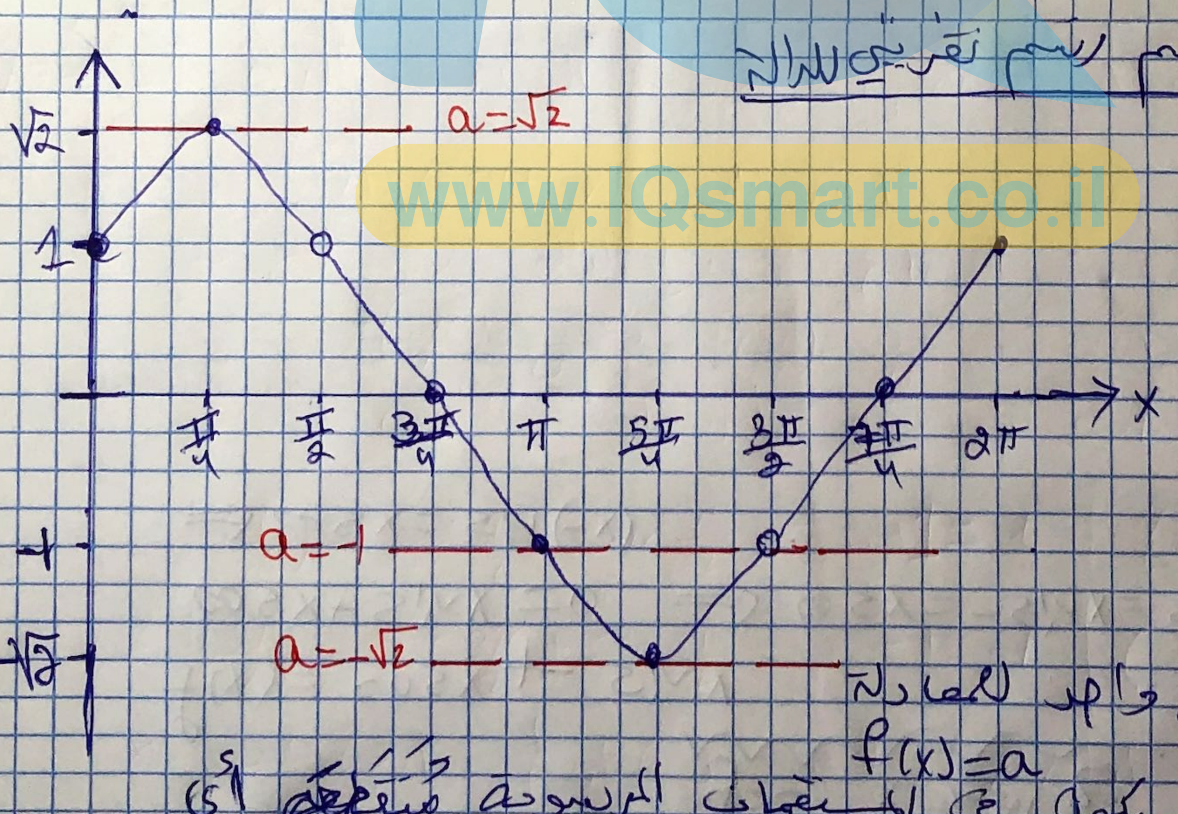
$f'(\frac{\pi}{3})<0$ $\quad f'(\frac{4\pi}{3})>0$ $\quad f(\frac{5\pi}{4})=\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}=-\sqrt{2}$

$f'(\pi)<0$ $\quad f$ $\quad f(2\pi)=\cos 2\pi+\sin 2\pi=1$

للإجمال: النقاط القصوى هي:

$(0,1)$ מינימום ق.ط , $(\frac{\pi}{4},\sqrt{2})$ מקסימום , $(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2})$ min , $(2\pi,1)$ מקסימום ق.ط

د.1 نرسم رسم تقريبي للدالة



د.2

حل واحد للمعادلة $f(x)=a$

يكون في المستقيمات المرسومة

$\boxed{a=\sqrt{2}}$ // $\boxed{a=-1}$ // $\boxed{a=-\sqrt{2}}$

(د)

لحسب جدول تغير الاقتران نلاحظ أن المنحنى سالبة في المجال $\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$ ولذلك المساحة المطلوبة هي القيمة المطلقة للتكامل المحدود.

$$S = \left| \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f'(x)\,dx \right| = \left[f(x) \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \left| \left[\cos x + \sin x \right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right|$$

$$S = \left| \left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) - \left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} \right) \right|$$

$$S = \left| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}_{0} \right|$$

$$S = \left| \frac{-2\sqrt{2}}{2} \right| = \left| -\sqrt{2} \right| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{S = \sqrt{2}}$$

حل سؤال 8

1. $f(x)=x^3 \qquad g(x)=\sqrt{f(x)}$

$g(x)=\sqrt{x^3}$

مجال تعريف:

الدالة $f(x)$ معرفة لكل x

الدالة $g(x)$ معرفة لكل $x\geq 0$

2. تقاطع الدول $g(x)=f(x)$

$\sqrt{x^3}=x^3 \xrightarrow{(\,)^2} x^3=x^6 \Rightarrow x^6-x^3=0$

$\Rightarrow x^3(x^3-1)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix}f(0)=0\\f(1)=1\end{matrix}$

$\boxed{\text{إذاً نقاط تقاطع الدالتين هي } (0,0) \quad (1,1)}$

ب. A تقع على $f(x) \Leftarrow A(c,c^3)$ — $0<c<1$ كون بين نقاط تقاطع الدالتين

B تقع على $g(x) \Leftarrow B:(t,\sqrt{t^3})$

AB موازي لمحور x اي للنقطتين نفس الاحداثي y

ولذلك يتحقق: $\sqrt{t^3}=c^3$

$(\,)^2 \Rightarrow t^3=c^6 \Rightarrow \boxed{t=c^2} \Rightarrow B:(c^2,c^3)$

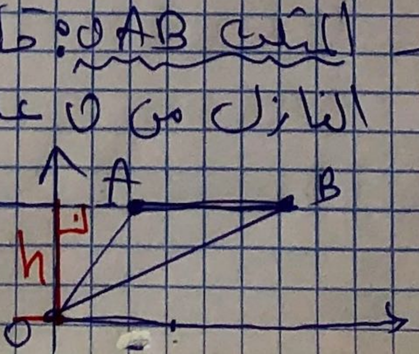
$\sqrt{t^3}=\sqrt{c^6}$

طول القطعة AB هو x_B-x_A اي

$\boxed{AB=c-c^2}$

ج. المثلث OAB: قاعدته AB وارتفاعه العمود النازل من O على AB. الارتفاع h هو الاحداثي y للنقطتين (نفس الاحداثي y)

اي $h=c^3$



مساحة المثلث OAB

$$S(c) = \frac{\overbrace{c^3}^{h}\overbrace{(c-c^2)}^{AB}}{2} = \frac{1}{2}\left[c^4 - c^5\right]$$

$$S'(c) = \frac{1}{2}4c^3 - \frac{1}{2}5c^4 = 2c^3 - 2.5c^4$$

$$\boxed{S'(c) = c^3(2-2.5c)}$$

$S'(c)=0 \Rightarrow c=0$ أو $2-2.5c=0$

$2=2.5c$

$0<c<1$

$\boxed{c=0 \text{ ليس حل}}$

$\boxed{\frac{4}{5} = c}$

$\boxed{0.8 = c}$

نفحص النقطة

$$S''(c) = 6c^2 - 10c^3$$

$$S''(0.8) = 6(0.8)^2 - 10(0.8)^2 = -1.28 < 0$$

لذلك $c=0.8$ هي מקסימום.

$$S(0.8) = \frac{(0.8)^3(0.8-0.8^3)}{2} = \boxed{\frac{128}{3125}}$$

(5) طول القطعة AB هو:

$AB = c - c^2$

نفحص $(AB)'$

$AB' = 1-2c = 0 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$

$AB'' = -2 < 0$

ولذلك $c=\frac{1}{2}$ يعطينا أطول طول قطعة AB

ولكن أكبر مساحة كانت عندما $\boxed{c=0.8}$

ولذلك أكبر مساحة للمثلث OAB لا تكون

عندما يكون AB أكبر ما يكون