حل نموذج بجروت

807-582

موعد صيف (ب) 2020

طاقم الرياضيات

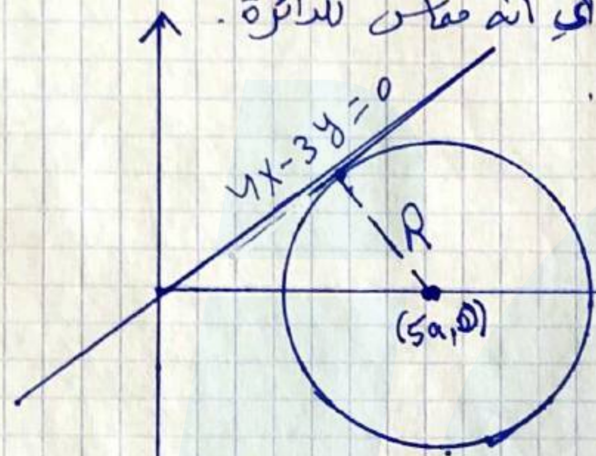
معهد IQ

حل سؤال 1

أ. معادلة دائرة مركزها $O(m,n)$ هي :-

$$(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$$

بحسب المعطيات مركز الدائرة هو $(5a,0)$. a برامتر موجب.
والمستقيم $4x-3y=0$ يمس الدائرة أي أنه مماس للدائرة.
لكي نجد معادلة الدائرة علينا أن نجد R.
بما أن مركز الدائرة يقع على المحور X
لذلك الرسم التقريبي للوضع
الموصوف بالسؤال هو كما مبين بالرسم



R هو بعد مركز الدائرة عن المماس
وبحسب قانون بعد نقطة عن مستقيم :- $d=\frac{|Ax+By+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$a>0$ يتحقق :-

$$R=\frac{|4\cdot(5a)+3\cdot(0)+0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|20a|}{\sqrt{25}}=\frac{20a}{5}=4a$$

$$R=4a$$

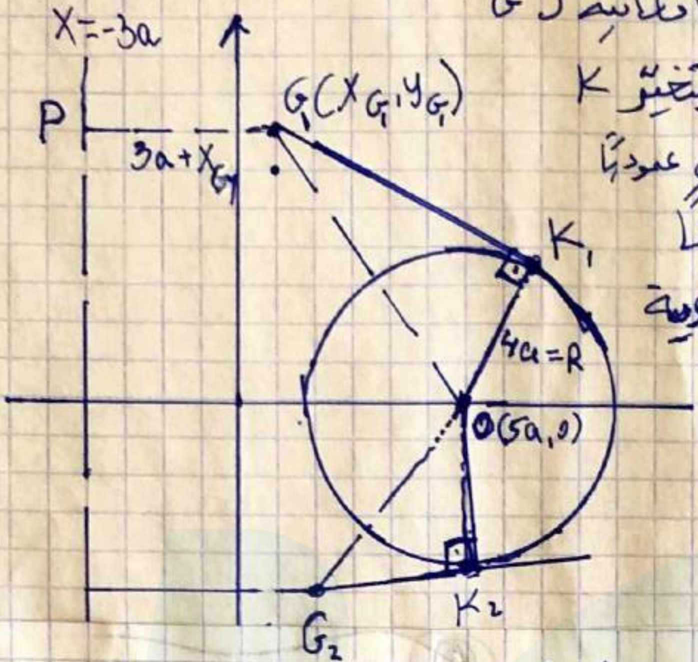
معادلة الدائرة: $\boxed{(x-5a)^2+y^2=16a^2}$

ب. بحسب المعطيات - النقطة $G(x_G,y_G)$ تقع خارج الدائرة
ومن هذه النقطة رسمنا مستقيم الذي يمس الدائرة في K
(واضح أن النقطة K تحقق معادلة الدائرة) وطلب منا أن نجد
المحل الهندسي لكل النقاط G التي بعدها عن النقطة K
مساوٍ لبعدها عن المستقيم $x=-3a$ - أي أنه عمليًا نحن
نبحث عن محل هندسي لكل النقاط التي بعدها عن نقطة ثابتة
مساوٍ لبعدها عن مستقيم ثابت - وهذا هو تعريف البرابولا.

نرسم الوضع الموصوف ونجد المحل الهندسي :-

• انتبه - هنالك اكثر من امكانية لـ G

وكل مرة تتغير النقطة G يتغير K أيضًا. ولكن بما أن المماس عمودي على نصف القطر لذلك دائمًا نحصل على مثلث قائم الزاوية بحيث $\measuredangle K = 90°$.



بحسب فيثاغورس:

$$G_1O^2 = \underbrace{R^2}_{OK^2} + (G_1K_1)^2$$

$OK^2 = R^2 = 16a^2$ // و $G_1K_1 = G_1P$ بُعد G_1 عن K_1 مساوٍ لبُعد G_1 عن P.

$$G_1O = \sqrt{(X_{G_1} - 5a)^2 + (y_G - 0)^2}$$

$$G_1O^2 = \left(\sqrt{(X_G - 5a)^2 + y_G^2}\right)^2 = (X_G - 5a)^2 + y_G^2$$

بحسب فيثاغورس: $G_1O^2 = R^2 + G_1K_1^2$

$$(X_G - 5a)^2 = 16a^2 + G_1K_1^2$$

$$y_G^2 + X_G^2 - 10X_G \cdot a + 25a^2 - 16a^2 = G_1K_1^2$$

$$y_G^2 + X_G^2 - 10X_G \cdot a + 25a^2 - 16a^2 = G_1K_1^2$$

$$\boxed{X_G^2 - 10X_G \cdot a + 9a^2 + y_G^2 = G_1K_1^2}$$

من جهة أخرى $G_1P = G_1K_1 \Leftarrow G_1P = X_{G_1} + 3a$

اذًا يتحقق: $(G_1K_1)^2 = (G_1P)^2 \Longrightarrow (G_1P)^2 = X_G^2 + 6X_G a + 9a^2$

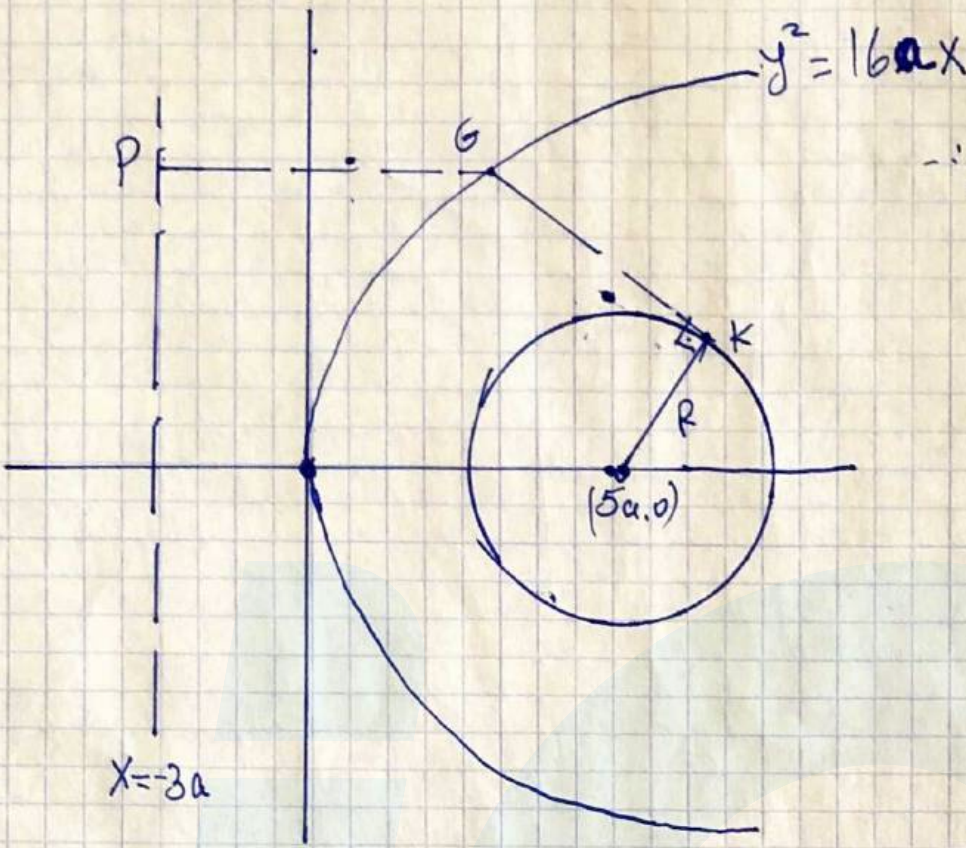
$$\cancel{X_G^2} - 10X_G \cdot a + \cancel{9a^2} + y_G^2 = \cancel{X_G^2} + 6X_G \cdot a + \cancel{9a^2}$$

$$\left\{ y_G^2 = 6aX_G + 10aX_G = 16aX_G \right.$$

وهذه هي معادلة المحل الهندسي الذي يُعبر عن برابولا.

الرسم البياني

للمحل الهندسي :-



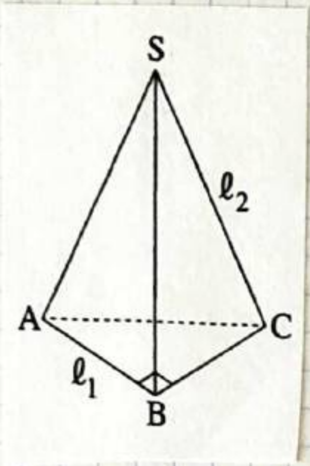
ج.1. $GK = 7.5$ إذا $GP = 7.5$ لأن $GK = GP$

وبالتالي أقصر بُعد أو أقصر طول لـ GK هو أيضاً أقصر بُعد للنقطة G عن المستقيم $X=-3a$ وبما أن النقطة G تتحرك على المحل الهندسي وكما نلاحظ فإن أقصر بُعد عن الراسم (مرسوم) للقطع المكافئ هي نقطة الاصل $(0,0)$ ولذلك أقصر بُعد يكون 7.5 عندما تكون إحداثيات النقطة $G(0,0)$.

<u>ج.2.</u> $GP = GK = 7.5$ أي يتحقق $GP = X_G + 3a = 7.5$

$GP = 0 + 3a = 7.5 \Longrightarrow \boxed{a = 2.5}$

حل سؤال 2 :



أ. بحسب المعطيات النقطة A تقع على l_1

لذلك إحداثيات A من الصورة $A:(6+3K, 10+5K, -7-4k)$

وأيضاً النقطة C تقع على l_2 لذلك إحداثياتها

من الصورة :- $C:(15+9t, 0, 6+13t)$

وبالتالي يمكن التعبير عن المتجه $\vec{AC}$ كالتالي:

$$\vec{AC}=\left(15+9t-(6+3k),\ 0-(10+5k),\ 6+13t-(-7-4k)\right)$$

$$\vec{AC}=\left(9+9t-3K,\ -10-5K,\ 13+13t+4k\right)$$

ومن جهة أخرى معطى أنّ $\underline{u}=\vec{AC}=(6,0,-8)$

اذاً يتحقق:

$$\begin{cases} (1)\quad 9+9t-3K=6 \\ (2)\quad -10-5K=0 \\ (3)\quad 13+13t+4K=-8 \end{cases}$$

من المعادلة (2) نحصل على $\boxed{K=-2}$ نعوض في المعادلة (1)

ونبسط نحصل على :- $\boxed{t=-1} \Leftarrow 9+9t+6=6$

ونعوض مكان $K=-2$ و $t=-1$ في إحداثيات النقاط A و C

ونحصل على : $\boxed{A:(0,0,1)}$ و $\boxed{C:(6,0,-7)}$

ب) المتجه $\overrightarrow{AB}$ هو المتجه الاتجاهي للمستقيم l (انظر د (ii))

أي أن $\overrightarrow{AB}=(3,5,-4)$ ، وبحسب البند السابق $A(0,0,1)$

ونفرض أن $B:(x_B,y_B,z_B)$ لذلك يتحقق

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-0,y_B-0,z_B-1)=(x_B,y_B,z_B-1)=(3,5,-4)$$

اذاً:

$$x_B=3\ ,\ y_B=5\ ,\ z_B-1=-4 \Rightarrow z_B=-3$$

وبالتالي:

$$\boxed{B:(3,5,-3)}$$

ج- معادلة المستوى ABC هي من الصورة

$$ax+by+cz+d=0$$

بحيث المتجه (a,b,c) معامد للمستوى أي يتحقق:

$$(a,b,c)\cdot AB=0 \Rightarrow (3,5,-4)(a,b,c)=0$$
$$(a,b,c)\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Rightarrow (-3,5,4)(a,b,c)=0$$

$$\begin{cases}3a+5b-4c=0\\ -3a+5b+4c=0\end{cases} \Rightarrow 10b=0,\ b=0$$

من المعادلة الأولى نحصل على $3a-4c=0 \Rightarrow 3a=4c$

نعوض $a=4$ نحصل $c=3$ وبالتالي $(a,b,c)=(4,0,3)$

ومعادلة المستوى من الصورة:

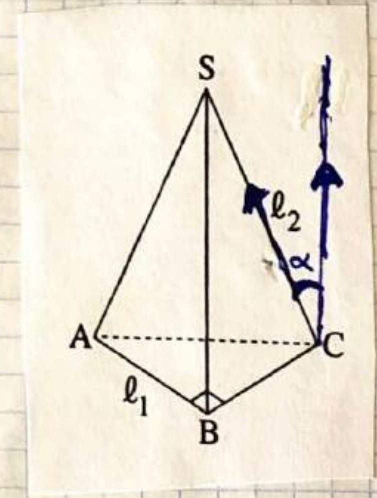
$$4x+3z+d=0$$

نعوض النقطة B في المعادلة ونجد d: $B:(3,5,-3)$

$$4\cdot3+0\cdot5+3\cdot(-3)+d=0 \Rightarrow \boxed{-3=d}$$

اذاً معادلة المستوى:

$$4x+3z-3=0$$



د. المتجه الذي يعامد المستوى ABC
هو المتجه (a,b,c) الذي وجدناه
في البند (ب) وحسبه وجدنا معادلة
المستوى وأي متجه آخر معامد للمستوى
مرتبط خطياً بهذا المتجه وبالتالي
المتجه المرسوم من C ويعامد المستوى ABC
هو من الصورة $m\cdot(a,b,c)$ أي $m\cdot(4,0,3)$

المتجه الاتجاهي (וקטור כיוון) للمستقيم ℓ_2 هو $(9,0,13)$

والزاوية المطلوبة هي α وتتحقق:-

$$\cos\alpha=\frac{|(4,0,3)(9,0,13)|}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{9^2+13^2}}=\frac{|36+0+39|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{250}}$$

$$\cos\alpha=\frac{|75|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25\cdot 10}}=\frac{75}{25\cdot\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\alpha=18.43^\circ}$$

إذاً الزاوية هي 18.43°.

حل سؤال 3 :

أ- $z^5 = 2^5$

العدد 2^5 بالصورة القطبية هو $2^5 \cdot cis\,0$

ولذلك المعادلة هي $z^5 = 2^5 \cdot cis\,0$

وبحسب ديموافر : $// \, z^5 = 2^5 cis(0+360k) \, // \sqrt[5]{\ }$

$z_k = 2\,cis\,72k \qquad k=0,1,2,3,4$

$z_0 = 2\,cis\,0$

$z_1 = 2\,cis\,72$

$z_2 = 2\,cis\,144$

$z_3 = 2\,cis\,216$

$z_4 = 2\,cis\,288$

ب- للمعادلة $z^n = 2^n$ يوجد n حلول وهذه الحلول عبارة عن رؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه n وكل مضلع منتظم يمكن أن نحصره داخل دائرة مركزها $(0,0)$ بحيث تكون الزاوية بين كل رأس والآخر هي $\frac{360}{n}$ ونصف قطر الدائرة $r=2$. وهذا المضلع يمكن تقسيمه الى n مثلثات متساوية الساقين (الساق هو نصف قطر الدائرة) طول الساق فيه 2 وزاوية الرأس فيه $\frac{360}{n}$ وبالتالي مساحة المضلع مساوية لمساحة ال n مثلثات اي

$$S_{\text{المضلع}} = \frac{\cancel{n}\cdot \cancel{2}\cdot 2\cdot \sin\frac{360^\circ}{n}}{\cancel{2}} = \cancel{n}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{360^\circ}{n} = 1 \Rightarrow \sin\frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftarrow \frac{360^\circ}{n} = 30^\circ + 360k \;//\; \frac{360^\circ}{n} = 150^\circ + 360k$$

وبما أن الزاوية المطلوبة هي زاوية مثلث لذلك $k=0$

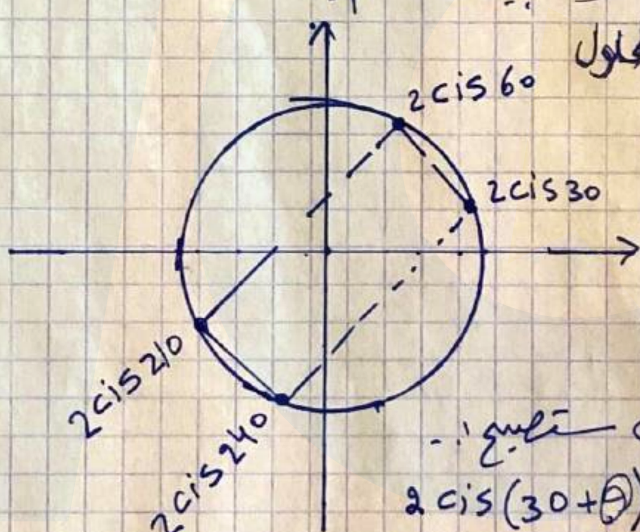
اذاً $\frac{360^\circ}{n} = 30 \Leftarrow \boxed{n=12}$ أو $n = \frac{360}{150} = 2.4$ (غير ملائم)

ج. حسب المعطى $w=a+bi$ هو حل للمعادلة $z^{12}=2^{12}$
ويتحقق أن $a\cdot b>0$ أي أنه إما أن يكون a و b موجبان
أو a و b سالبان وبالتالي الأرباع الملائمة لذلك
هي الربع I أو الربع III.

د. المعادلة هي $z^{12}=2^{12}$ وحلولها هي:

$$Z_k = 2\,cis\,30k$$

الحلول التي في الربع الأول هي: $2cis30$ و $2cis60$
الحلول التي في الربع الثالث هي: $2cis210$ و $2cis240$
وهذا المستطيل هو المبين بالرسم:



اذا ضربنا كل واحد من الحلول
ب $cis\theta$ اذاً:
سعة كل واحد
من الحلول (على الدائرة)
سيكبر ب θ
وبالتالي الرؤوس ستصبح:

$2cis(30+\theta)$ // $2cis(60+\theta)$

$2cis(210+\theta)$ // $2cis(240+\theta)$

ولكي تكون الأضلاع موازية للمحور x و y يجب أن يكون
الرأسين $2cis(30+\theta)$ و $2cis(60+\theta)$ موازيين للمحور x
أي أن يتحقق:

$$Im(2cis(60+\theta)) = Im(2cis(30+\theta))$$

$$\Rightarrow \sin(60+\theta) = \sin(30+\theta)$$

$60+\theta = 30+\theta$ $60+\theta = 180-(30+\theta)$

$30 = 0$ $\boxed{\theta = 45^\circ}$

غير ملائم

حل سؤال 4

$$f(x)=\frac{2\cdot e^{2x}}{e^{2x}-a\cdot e^{x}+3}$$

1.P بما أن الدالة غير معرفة في $x=0$ اذاً يتحقق ان المقام $=0$ عندما $x=0$

$$e^{2\cdot 0}-a\cdot e^{0}+3=0$$

$$1-a+3=0 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$f(x)=\frac{2\cdot e^{2x}}{e^{2x}-4e^{x}+3}$$

مجال تعريف الدالة هو:

$e^{x}=t$ نعوض $\quad e^{2x}-4e^{x}+3\neq 0$

$\longrightarrow t^{2}-4t+3\neq 0$

$\rightarrow t_1=1 \Rightarrow e^{x}=1 \rightarrow \boxed{x=0}$

$\rightarrow t_2=3 \Rightarrow e^{x}=3 \Rightarrow \boxed{x=\ln 3}$

اذاً: مجال تعريف الدالة هو $x<0$ أو $0<x<\ln 3$ أو $x>\ln 3$

2P خطوط التقارب العمودية $x=0$ أو $x=\ln 3$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}-4e^{x}+3}=2 \qquad \boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x\to+\infty \end{matrix}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\frac{2e^{2x}}{2e^{2x}-4\cdot e^{x}+3}=0 \qquad \boxed{\begin{matrix} y=0 \\ x\to-\infty \end{matrix}}$$

3.ب) نجد مجالات التصاعد والتنازل للدالة :-

$$f'(x)=\frac{4\cdot e^{2x}(e^{2x}-4e^{x}+3)-2e^{2x}(2e^{2x}-4e^{x})}{(e^{2x}-4e^{x}+3)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}(e^{2x}-4e^{x}+3)-4e^{2x}(e^{2x}-2e^{x})}{(e^{2x}-4e^{x}+3)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}(e^{2x}-4e^{x}+3-e^{2x}+2e^{x})}{(e^{2x}-4e^{x}+3)^{2}}=\frac{4e^{2x}(3-2e^{x})}{(\quad)^{2}}$$

المقام دائماً موجب لذلك إشارة البسط تُحدد المجالات التصاعدية والتنازلية. إذا كان البسط موجب اذاً الدالة تصاعدية وإذا كان سالب اذاً الدالة تنازلية.

$$4e^{2x}(3-2e^{x})=0$$

$$3-2e^{x}=0 \Rightarrow e^{x}=1.5 \Rightarrow \boxed{x=\ln 1.5}$$

نُصنف النقاط ونجري لنحدد المجالات الموجبة والسالبة :.

x	$x<0$	0	$0<x<\ln 1.5$	$\ln(1.5)$		$\ln 3$	
f'	$+$		$+$		$-$		$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

مجالات تصاعدية: $0<x<\ln 1.5$ أو $x<0$

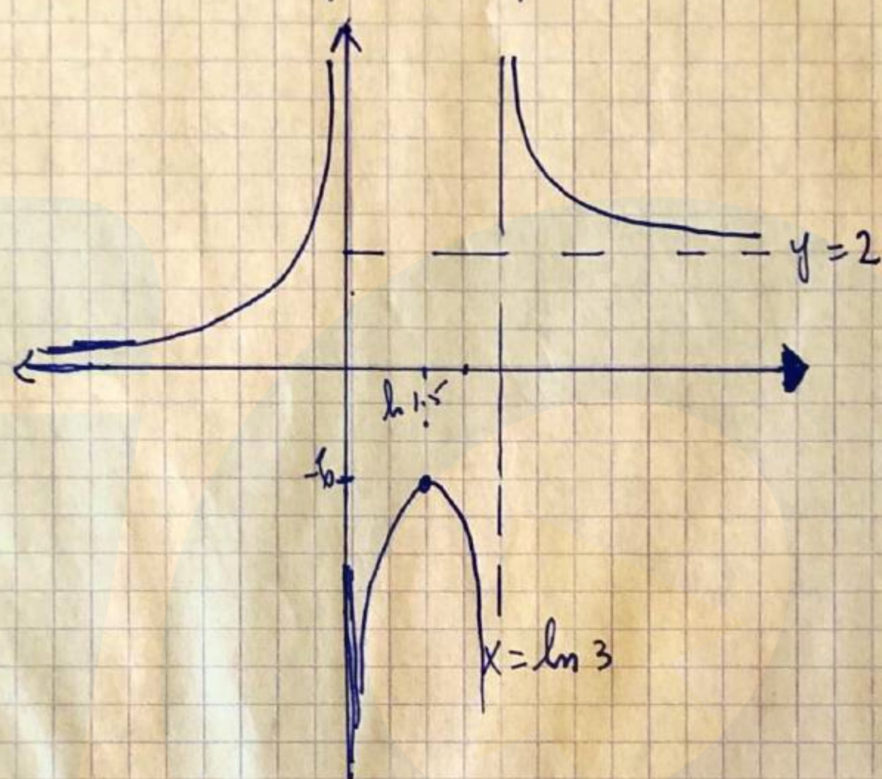
مجالات تنازلية $\ln 1.5<x<\ln 3$ أو $x>\ln 3$

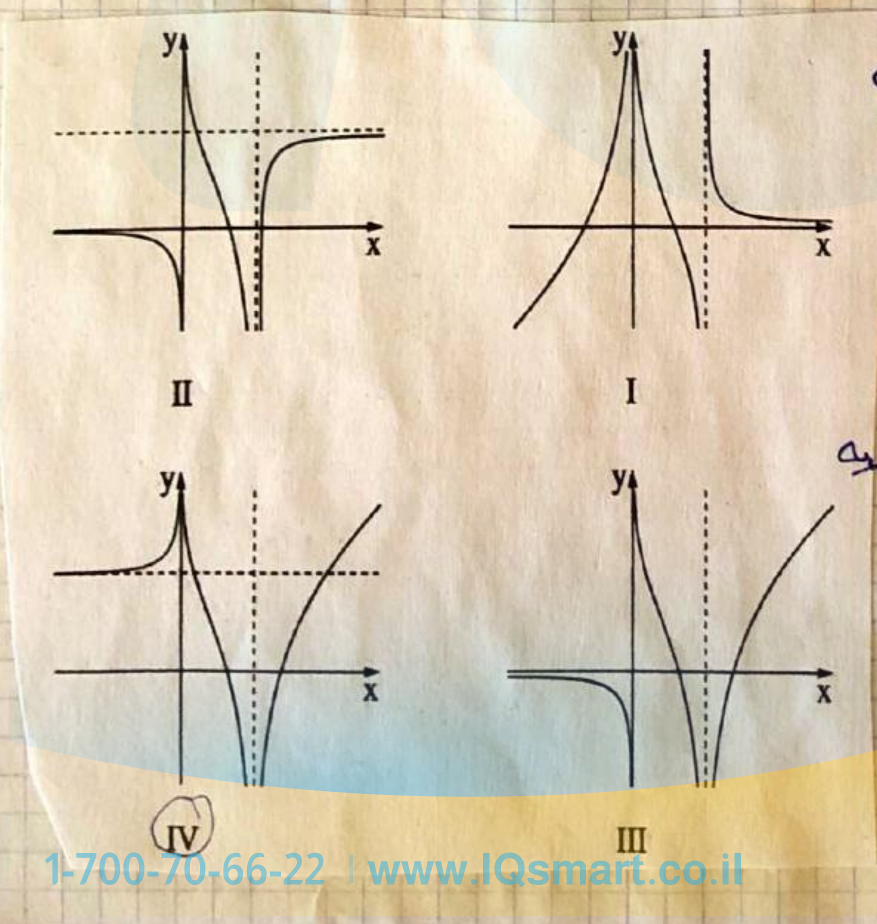
ب) $X = \ln(1.5)$ هي نقطة מקסימום.

$$f(\ln(1.5)) = \frac{2\cdot(1.5)^2}{(1.5)^2 - 4(1.5) + 3} = -6$$

נק' המקסימום

$$(\ln(1.5), -6)$$





ج) الدالة $f(x)$ عبارة عن
مشتقة الدالة الأصلية
التي نبحث عنها.
وبحسب المجالات
الموجبة والسالبة لـ f
نحدد المجالات التصاعدية
والتنازلية للأصلية
بما ان f موجبة
في $X<0$ او $X>\ln 3$
اذاً الرسم الملائم IV

د. $h(x) = f(x+k)$

بما أن $k \neq 0$ اذاً لكي يكون خط تقارب للدالة $h(x)$ الذي معادلته $x=0$ فالازاحة يجب ان تكون الى اليسار بحيث يصبح خط التقارب الذي معادلته $x = \ln 3$ هو $x=0$

أي يجب ازاحة الدالة بمقدار $k = \ln 3$

وعندها $h(x) = f(x+\ln 3)$

حل سؤال 5

أ. حسب المعطيات $f(x)$ معرفة لكل x
وأيضاً $g(x)$ مُعرّفة لكل x. وبما أن $g(x)=\ln(f(x))$
اذا بالضرورة $f(x)>0$ لكل x لأن دالة $\ln x$ معرفة لكل $x>0$

نفرض ان $f'(x)$ هي مشتقة $f(x)$ اذاً

$$g'(x)=(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

اذاً $g'(x)=(\ln f(x))'=$

$$\boxed{g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

نفرض أن x_1 نقطة מקסימום ل $f(x)$ اذاً يتحقق :-

① $f'(x_1)=0$ وأيضاً ② يوجد جوار ل x_1 مثل $x_0<x_1<x_2$

بحيث يتحقق:

x	$x_0<x<x_1$	x_1	$x_1<x<x_2$
f'	+	0	−
f موجبة لكل x	$\nearrow$ +		$\searrow$ +

وبالتالي بنفس الجوار بالنسبة ل $g(x)$ يتحقق:

x	$x_0<x<x_1$	x_1	$x_1<x<x_2$
f'	+	0	−
g'	$\frac{f'}{f}=\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{f'}{f}=\frac{-}{+}=-$
g	$\nearrow$		$\searrow$

$$\boxed{g'(x_1)=\frac{f'(x_1)}{f(x)}=0}$$

تذكر f موجبة لكل x

اذاً النقطة x_1 هي מקסימום ل g أيضاً

وبنفس الاسلوب نبرهن أنه إذا كان x_1 מינימום ل f اذا هي ...
نقطة מינימום للدالة g أيضاً.

ب.1. بحسب المعطيات فإن النقطة $(1,2)$ هي قصوى لـ f
ومن الرسم نستنتج أنها מקסימום. وبحسب (P) بأن $x=1$
ستكون نقطة מקסימום للدالة g أيضاً. $f(x) > 0$ لكل x بحسب الرسم
إذاً مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو كل x أي $\mathbb{R}$. (الشرح في بند (P)).

2. نقطة الמקסימום للدالة $g(x)$ هي:

$$g(1) = \underbrace{\ln(2)}_{\ln(f(1))}$$

إذاً: $(1, \ln(2))$ מקסימום g.

3. بما أن الدالة g معرّفة لكل x إذاً لا يوجد خطوط تقارب عمودية.

خطوط التقارب الأفقية:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} f(\infty) = \ln(1) = 0 \implies \boxed{y=0}_{x \to +\infty}$$

خط تقارب $y=1$ لـ f $(x \to +\infty)$

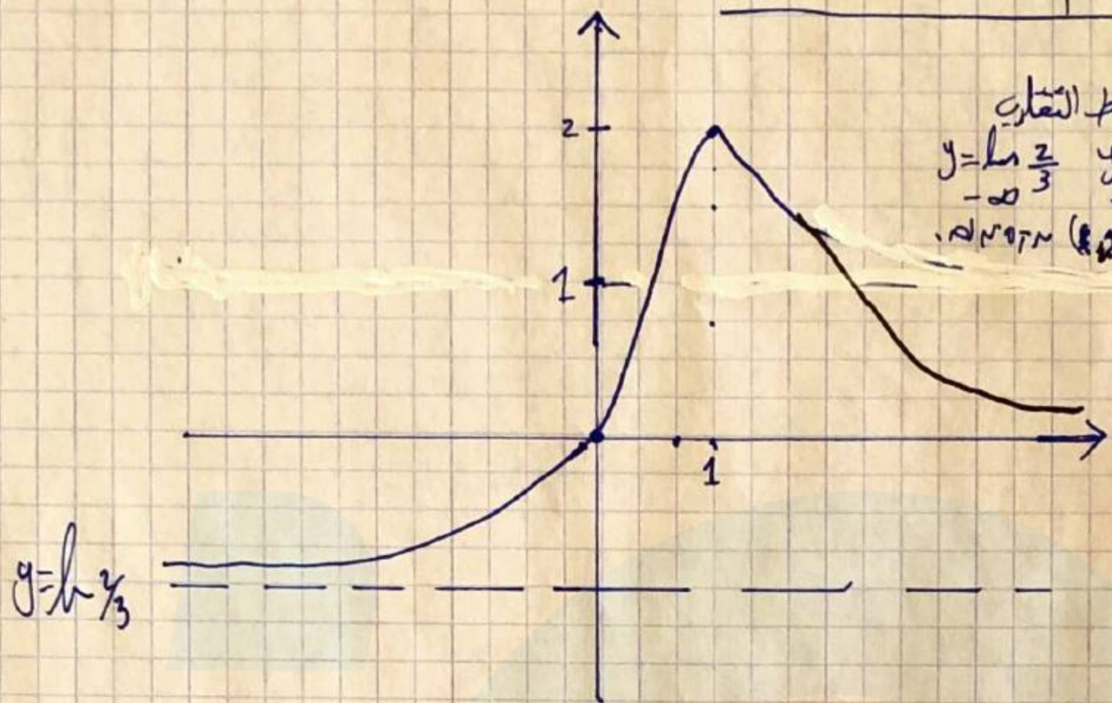
$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} f(-\infty) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \qquad y = \ln\left(\frac{2}{3}\right)_{x \to -\infty}$$

خط تقارب $y = \frac{2}{3}$ لـ f
عندما $x \to -\infty$

4. المجالات الموجبة للدالة $g(x)$ هي المجالات التي تحقق
$f(x) > 1$ وعندها $g(x) = \ln(f(x))$ ستكون موجبة.
المجالات التي تحقق $f(x) > 1$ بحسب رسم f هي $\underline{x > 0}$

المجالات السالبة للدالة $g(x)$ هي المجالات التي تحقق أنّ:
$0 < f(x) < 1$ وبحسب رسم الدالة f هذه المجالات هي $\underline{x < 0}$

5) الرسم البياني للدالة $g(x)$:



خطوط التقارب

$y=\ln\frac{2}{3}$ $\quad -\infty$ $\qquad y=0$ $\quad +\infty$

מקסימום $(1,2)$.

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{f(x)}=f'(x)\cdot\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)$$

إذاً:

$$h'(x)=f'(x)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)$$

$$h'(x)=0 \Rightarrow f'(x)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)=0$$

$f'(x)=0 \rightarrow \boxed{x=1}$

$1-\frac{1}{f(x)}=0$

$1=\frac{1}{f(x)} \rightarrow \boxed{f(x)=1} \rightarrow \boxed{x=0}$

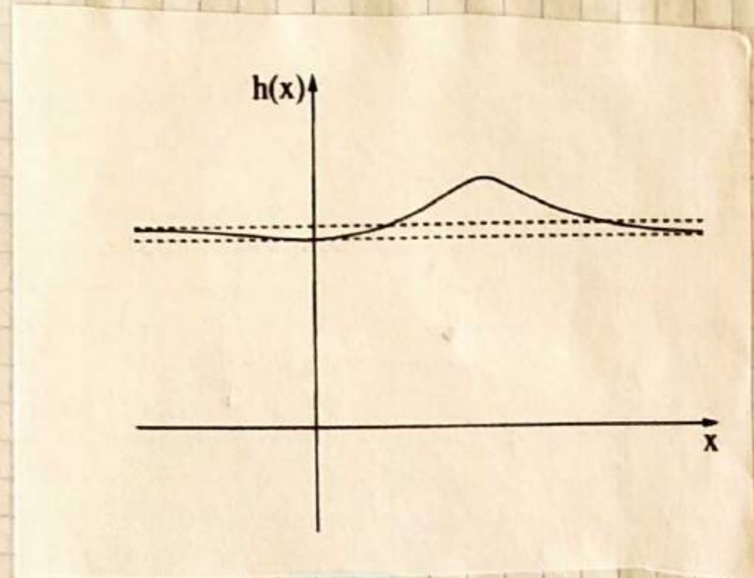
بحسب رسم الدالة f.

إذاً $\boxed{x=1}$ و $\boxed{x=0}$ هي نقاط قصوى

$$h(0)=f(0)-g(0)=1-0=1 \Rightarrow (0,1)\rightarrow min$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=2-\ln(2)=1.306 \Rightarrow (1,1.306)\ max$$

* بما أن الدالة متصلة إذاً النقطة التي إحداثي y لها أكبر هي מקסימום



2-P

النقطة A تقع على f

النقطة B تقع على g

بما أن القطعة AB تُعامد المحور x اذاً ل A و B نفس الاحداثي x اي:-

$B:(x_0,y_B)$ $A(x_0,y_A)$

وبالتالي طول القطعة AB هو: $y_A - y_B$ وهو عملياً:-

$$f(x_0)-g(x_0)=h(x_0)$$

اذاً نبحث عن x_0 الذي يحقق ان $h(x_0)=1$ وبحسب تابع البنود السابقة النقطة هي $(0,1)$ اي $h(0)=1$ وفي $x_0=1$ نحصل على $AB=1$.