حل نموذج بجروت

806-581

موعد (ب) 2020

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1:

أ- حسب المعطيات: طول مسار العدو هو 42 كم.
سرعة عدو أكرم أكبر بـ 1 كم/س من سرعة عدو رامي
لذلك اذا فرضنا ان سرعة عدو رامي هي V اذا سرعة
أكرم هي $V+1$. ويتحقق بالنسبة لزمن انهاء مسار العدو:

زمن أكرم: $\boxed{\frac{42}{V+1}}$ وزمن رامي $= \boxed{\frac{42}{V}}$

بما أن أكرم بدأ مسار العدو الساعة 15:00 ورامي بدأ المسار
الساعة 13:30 اي ان أكرم بدأ مسار العدو ساعة ونصف
بعد رامي ورامي وصل الى نهاية المسار بنصف ساعة قبل أكرم
لذلك يتحقق:

$1 +$ زمن أكرم $=$ زمن رامي

اي يتحقق:

$$\frac{42}{V} = \frac{42}{V+1} + 1 \quad / \, V(V+1)$$

$$\Rightarrow 42(V+1) = 42V + V(V+1)$$

نبسط المعادلة ونحلها نحصل على:

$\boxed{V_1 = 6}$ كم/س ، $V_2 = -7$ غير ملائم

اذا سرعة رامي 6 كم/س. وأكرم 7 كم/س $(V+1)$
وأكرم انهى المسار خلال $42:7=6$ (6 ساعات) ورامي خلال 7 ساعات
اي الساعة $15:00 + 6 = 21:00$ انهى أكرم مسار العدو

ب-
بحسب المعطيات أكرم بدأ المسابقة الساعة 6:00 وانهاه قبل الساعة 10:00
وبدأ العدو الساعة 15:00 وانهاه الساعة 21:00 ولذلك زمن
ركوب الدراجة الهوائية أكبر من 5 ساعات وأقل من 9 ساعات $(15-6)$

أكبر سرعة لمسار الدراجة $= \frac{180}{5} = 36$ كم/س وأقل سرعة $= \frac{180}{9} = 20$ كم/س
اذا سرعة أكرم في مسار ركوب الدراجة V_d يتحقق $20 < V_d < 36$

وبالتالي: مقولة I غير ممكنة ، مقولة II ممكنة

حل سؤال 2

معطى: $S_n = 2\cdot 3^n - 2$

أ.(1) $S_n = 2\cdot 3^n - 2 \implies a_1 = S_1 = 2\cdot 3^1 - 2 = 6 - 2 = 4$

$$\boxed{a_1 = 4}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2\cdot 3^n - \cancel{2} - (2\cdot 3^{n-1} - \cancel{2}) = 2\cdot 3^n - 2\cdot 3^{n-1}$$

$$= 2\cdot 3^{n-1}(\overset{2}{3-1}) = 4\cdot 3^{n-1}$$

$$a_n = 4\cdot 3^{n-1}$$

أ.(2): قانون الحد العام من الصورة: $a_n = a_1 q^{n-1}$

بحيث $a_1 = 4$ و $q = 3$ اذا المتوالية هندسية اساسها 3

ملاحظة يمكن ايضاً اثبات ذلك بواسطة $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$ عدد ثابت

نلاحظ أن: $a_{n+1} = 4\cdot 3^n$ وعندها

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4\cdot 3^n}{4\cdot 3^{n-1}} = 3$$

نفحص هل a_1 يحقق قانون الحد العام: $\boxed{a_1 = 4\cdot 3^{1-1} = 4}$ يحقق

ب.1 $C_n = S_{n+1} - S_n$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

وبالتالي $C_n = a_{n+1} \Leftarrow$ وبما ان a_n هندسية اذاً C_n هندسية

$$C_1 = a_2 = 4\cdot 3^1 = 12$$

$C_n = 12\cdot 3^{n-1} = (3 a_n = \overset{12}{3\cdot 4}\cdot 3^{n-1})$ وهذه صورة قانون الحد العام للمتوالية الهندسية.

ب.2 $$S_{c_k} = c_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q-1} = 12\cdot \frac{3^k - 1}{3-1} = 6\cdot(3^k - 1)$$

$$S_{a_k} = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q-1} = 4\cdot \frac{3^k - 1}{3-1} = 2\cdot(3^k - 1)$$

$$\frac{S_{c_k}}{S_{a_k}} = \frac{6\cdot \cancel{(3^k - 1)}}{2\cdot \cancel{(3^k - 1)}} = 3$$

حل سؤال 3

بحسب المعطيات :

احتمال اختيار مسافر لأوروبا هو p $(p>0.4)$

احتمال اختيار مسافر لأمريكا هو $\frac{3}{5}p$

احتمال اختيار مسافر لاسيا: $1-p-\frac{3}{5}p \Leftarrow 1-\frac{8}{5}p$ $1-1.6p$

كذلك معطى أن احتمال اختيار مسافرين اثنين ليس لنفس القارة هو 0.62

$$P\begin{pmatrix}\text{اختيار}\\ \text{مسافرين اثنين}\\ \text{ليس لنفس}\\ \text{القارة}\end{pmatrix} = 1-\left[P\begin{pmatrix}\text{الاثنين}\\ \text{لأمريكا}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\text{الاثنين}\\ \text{لأوروبا}\end{pmatrix} + P\begin{pmatrix}\text{الاثنين}\\ \text{لاسيا}\end{pmatrix}\right]$$

$$P\begin{pmatrix}\text{مسافرين}\\ \text{اثنين}\\ \text{لاسيا}\end{pmatrix} = (1-1.6p)^2 = 1-3.2p+2.56p^2$$

$$P\begin{pmatrix}\text{مسافرين}\\ \text{اثنين}\\ \text{لامريكا}\end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}p\right)^2 = \frac{9}{25}p^2 = 0.36p^2$$

$$P\begin{pmatrix}\text{مسافرين}\\ \text{اثنين}\\ \text{لاوروبا}\end{pmatrix} = p^2$$

$$P\begin{pmatrix}\text{اختيار}\\ \text{مسافرين}\\ \text{اثنين}\\ \text{ليس لنفس}\\ \text{القارة}\end{pmatrix} = 0.62 = 1-\left[1-3.2p+2.56p^2+0.36p^2+p^2\right]$$

$$0.62 = 1-\left[1-3.2p+3.92p^2\right] =$$

$$0.62 = -3.92p^2+3.2p \to 3.92p^2-3.2p+0.62=0$$

نحل المعادلة نحصل على $p_1 = 0.316$ غير ملائم $p>0.4$ $\boxed{p_2 = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{اذاً } p=\frac{1}{2}}$

ب) بحسب نتائج البند (أ) $P=\frac{1}{2}$

أي احتمال اختيار شخص مسافر لأوروبا هو $\frac{1}{2}$

وبالتالي احتمال اختيار شخص مسافر لأمريكا هو $\frac{3}{5}P = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{10}$

وعندها احتمال اختيار مسافر لآسيا $\frac{2}{10} = 1-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}$

من بين 5 مسافرين :-

الاحتمال لاختيار على الأقل اثنين مسافرين لأمريكا

تحت الشروط ان اثنين من بين الـ 5 غير مسافرين لأمريكا

يعني ان يسافر اثنين او ثلاثة من بين الخمسة لأمريكا

وبهذه الحالة نضمن أن اثنين من بين الـ 5 غير مسافرين لأمريكا.

$$P\binom{\text{2 من 5}}{\text{لأمريكا}} = \binom{5}{2}(0.3)^2\cdot(0.7)^3 = 10\cdot(0.09)(0.343) = 0.3087$$

$$P\binom{\text{3 من 5}}{\text{لأمريكا}} = \binom{5}{3}(0.3)^3(0.7)^2 = 10\cdot(0.027)(0.49) = 0.1323$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{اختيار 2}\\ \text{على الأقل لأمريكا}\\ \text{واثنين ليس}\\ \text{لأمريكا}\end{array}\right) = 0.3087+0.1323 = \underline{0.441}$$

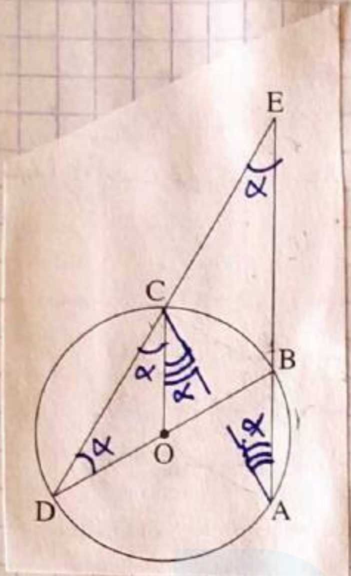
إذن :

ج. من بين الـ 50 مسافر هنالك $\frac{1}{2}\cdot 50 = 25$ مسافر لأوروبا

و $\frac{3}{10}\cdot 50 = 15$ مسافر لأمريكا و $\frac{2}{10}\cdot 50 = 10$ مسافرين لآسيا

$$P\left(\begin{array}{c}\text{مسافرين}\\ \text{لأمريكا}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{مسافرين}\\ \text{لنفس}\\ \text{القارة}\end{array}\right) = \frac{\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}}{\frac{25}{50}\cdot\frac{24}{49}+\frac{15}{50}\cdot\frac{14}{49}+\frac{10}{50}\cdot\frac{9}{49}} = \frac{\frac{210}{2450}}{\frac{900}{2450}} = \frac{7}{30}$$

حل سؤال 4



بحسب المعطيات DB قطر (O مركز الدائرة)

$OC \parallel AB \Leftarrow OC \parallel AE$ (AE امتداد AB)

أ- (1) $OC = OD$ أنصاف أقطار بالدائرة.

(2) $\sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC$ زوايا قاعدة في مثلث متساوي الساقين.

(3) $\sphericalangle DCO = \sphericalangle AED$ زوايا متناظرة بين متوازيين

(4) $\sphericalangle CDO = \sphericalangle AED$ من دمج (2) و(3)

وهو المطلوب (أ)

ب- نرسم المستقيم CA - وتر بالدائرة.

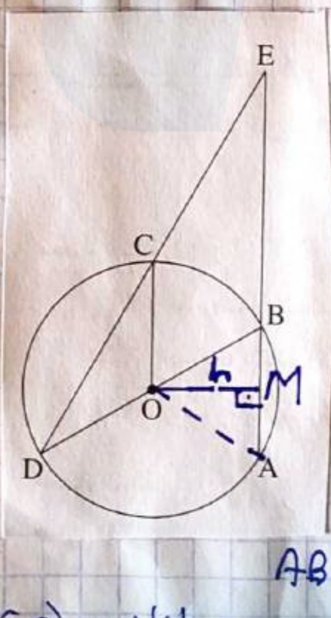
(5) $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAE = \alpha$ محيطية تقابل نفس القوس CB

(6) $\sphericalangle OCA = \sphericalangle CAB = \alpha$ زوايا متبادلة بين متوازيين

(7) $\sphericalangle OCA = \sphericalangle CAB = \alpha$ من دمج (5) و(6)

(8) اذاً ينتج أن CO ينصف $\sphericalangle DCA \Leftarrow \sphericalangle OCA = \sphericalangle DCO = \alpha$

وهو المطلوب (ب)



ج- معطى أن $\frac{EB}{BA} = 2 \Rightarrow EB = 2BA$

(9) في المثلث DBE، OC هي قاعدة وسطى

بحسب النظرية - المستقيم الذي ينطلق من منتصف ضلع (O منتصف DB) ويوازي احد اضلاع المثلث ينصف الضلع الآخر ⇐ C منتصف DE

(10) إذاً $EB = 2EC = 2R$ اعتماداً على (9) و $CO = R$

(11) بما أن $EB = 2BA$ اذاً $BA = R$

(12) ينتج انه في المثلث OBA ⇐ $AB = OB = OA = R$

وهو المطلوب (ج)

د. معطى أن مساحة شبه المنحرف COBE هي 9

(13) $\Delta DBO \sim \Delta DOC$ حسب (ز ز ز)

$\measuredangle D$ مشتركة

$\measuredangle DCO = \measuredangle DEB$ متناظرة بين متوازيين

(14) $\left(\frac{CO}{EB}\right)^2 = \frac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta DEB}}$ النسبة بين مساحات المثلثات المتشابهة تربيع نسبة الأضلاع

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta DEB}}$$

$$S_{\Delta DEB} = S_{\Delta DOC} + S_{COBE} = S_{\Delta DOC} + 9$$

إذاً $\frac{1}{4} = \frac{S_{\Delta DOC}}{S_{\Delta DOC}+9} \Leftarrow 4S_{\Delta DOC} = S_{\Delta DOC} + 9$

$\to 3S_{\Delta DOC} = 9 \longrightarrow \boxed{S_{\Delta DOC} = 3}$

(15) نرسم من O ارتفاع يقطع امتداد EB في M (الرسم بالصفحة السابقة)

$OM = h$ هو ارتفاع شبه المنحرف OCEB

وأيضاً ارتفاع للمثلث AOB.

مساحة شبه المنحرف COBE هي 9

ويتحقق أن $\frac{h}{2}\cdot(\overset{R}{CO}+\overset{2R}{EB}) = 9$

$$\frac{3R\cdot h}{2} = 9 \Longrightarrow \boxed{R\cdot h = 6}$$

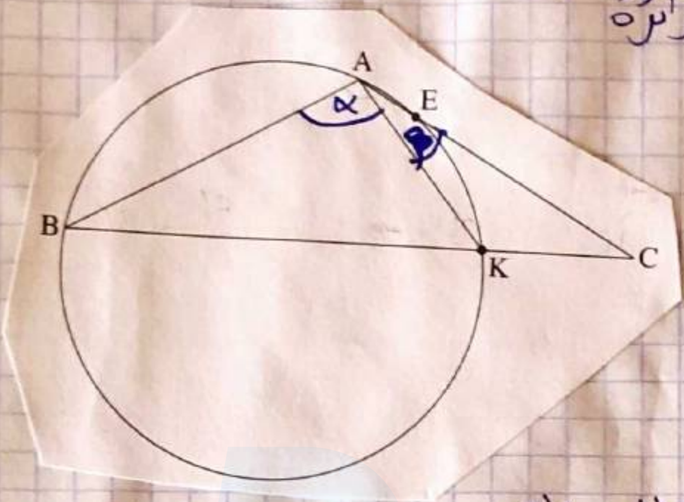
من جهة أخرى: مساحة المثلث $OBA = \frac{h\cdot \overset{R}{AB}}{2} \rightarrow \frac{R\cdot h}{2}$

بما أن $R\cdot h = 6$ إذاً $\boxed{S_{\Delta OAB} = \frac{6}{2} = 3}$

وبالتالي: $\boxed{S_{\Delta DOC} + S_{\Delta OAB} = 3+3 = 6}$

وهو المطلوب (د)

حل سؤال 5



1. نفرض أن R هو نصف قطر الدائرة التي تحصر المثلث AKC

في المثلث AKC - بحسب نظرية ال sin

$$\frac{AK}{\sin \measuredangle C} = 2R$$

$$\boxed{\rightarrow AK = 2R \cdot \sin \measuredangle C}$$

في المثلث ABK بحسب نظرية ال sin

$$\frac{AK}{\sin \measuredangle B} = 2r$$ (r نصف قطر الدائرة التي تحصر AKB)

$$\rightarrow AK = 2r \sin \measuredangle B$$

لذلك:
$$\frac{AK}{2r \sin \measuredangle B} = \frac{AK}{2R \cdot \sin \measuredangle C}$$

$\measuredangle B = \measuredangle C$ زوايا قاعدة في مثلث متساوي الساقين

لذلك $\boxed{r = R}$

2. في المثلث ABK يتحقق: $\frac{BK}{\sin \alpha} = 2r \rightarrow BK = 2r \cdot \sin \alpha$

في المثلث AKC يتحقق $\frac{KC}{\sin \beta} = 2R \rightarrow KC = 2R \sin \beta$

$$\rightarrow \frac{BK}{KC} = \frac{\cancel{2r}}{\cancel{2R}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow \boxed{\frac{BK}{KC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}}$$

ب.) بحسب المعطيات: $\alpha+\beta=120^\circ$

اذاً في المثلث ABC يتحقق

$$\angle B = \angle C = \frac{180^\circ-120^\circ}{2} = 30^\circ$$

بما أن $\angle AKB > \beta$ إذاً $30 > \beta$

وبالتالي:

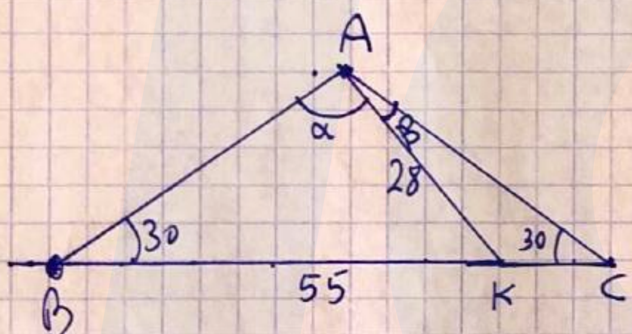
$$\alpha+\beta=120 \rightarrow \alpha=120-\beta$$

$$\rightarrow \alpha > 120-30 \rightarrow \alpha = 90$$

اذاً α منفرجة

وهو المطلوب (ب)

ج.) معطى أن $AK=28$ $BK=55$



في المثلث AKC

$$\frac{55}{\sin\alpha} = \frac{28}{\sin 30}$$

$$\sin\alpha = \frac{55\cdot\sin 30}{28} = 0.9821$$

$\alpha_1 = 79.155$ $\boxed{\alpha_2 = 100.844}$

غير ملائمة لأن α منفرجة وينتج ان $\boxed{\beta = 120-\alpha = 19.156}$

في المثلث $A\cancel{K}C$

$$\frac{KC}{\underbrace{\sin\beta}_{\sin 19.156}} = \frac{28}{\sin 30} \Rightarrow KC = \frac{28\cdot\sin 19.156}{\sin 30} = 18.375$$

$$\boxed{KC = 18.375}$$

$$BC = BK + KC = 55 + 18.375 = 73.375$$

$$\boxed{BC = 73.375}$$

حل سؤال 6

$$f(x)=(x+3)^4(2-x)$$

أ. تقاطع مع المحاور:

مع x $\Leftarrow$ $y=0$ $\Leftarrow$

$$\underbrace{(x+3)^4}_{=0}\underbrace{(2-x)}_{=0}=0$$

أو

$\boxed{x=-3}$ أو $\boxed{x=2}$

$\{(2,0) \quad (-3,0)\}$

مع y: $\Leftarrow$ $x=0$

$$f(0)=(0+3)^4\cdot(2-0)=\underbrace{3^4}_{81}\cdot 2=162$$

$(0,162)$

ب. النقاط القصوى

نجد المشتقة $f'(x)$

$$f(x)=\overset{g(x)}{(x+3)^4}\cdot\overset{k(x)}{(2-x)}$$

$g'(x)=4(x+3)^3\cdot(1)$ // $k'(x)=-1$

$$f'(x)=g'\cdot k+g\cdot k' \Rightarrow f'(x)=4(x+3)^3\cdot(2-x)+(x+3)^4(-1)$$

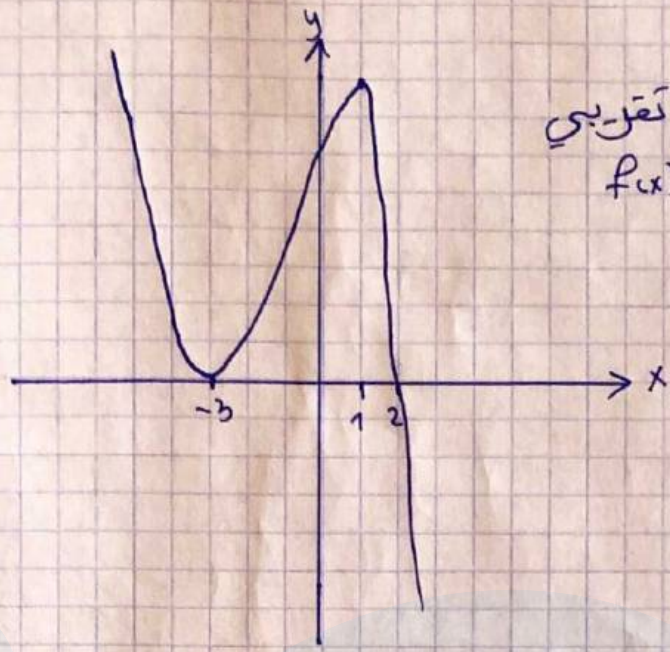
$$f'(x)=(x+3)^3\cdot[4(2-x)-(x+3)]=f'(x)=(x+3)^3(-5(x-1))$$

$$\boxed{f'(x)=-5(x-1)(x+3)^3}$$

$$f'(x)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

x	$x<-3$ $(x=-4)$	-3	$-3<x<1$ $(x=0)$	1	$x>1$ $(x=2)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	256	$\searrow$

$(-3,0)$ min $\quad (1,256)$ max



3.أ - رسم تقريبي للدالة f(x)

ب - $g(x)=\frac{1}{f(x-3)}$

ب.1 مجال تعريف الدالة g(x) هو $f(x-3)\neq 0$

الدالة f(x-3) عبارة عن إزاحة 3 وحدات الى اليمين لـ f(x)

ولذلك نقاط f(x-3) الصفرية هي $-3+3=0$ و $2+3=5$

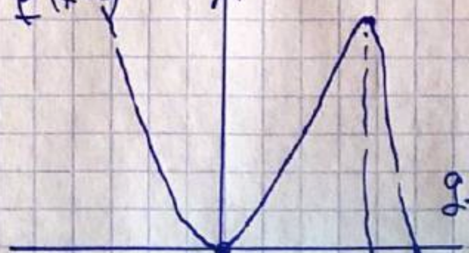
وبالتالي مجال تعريف g(x) هو $x\neq 5$ او $x\neq 0$

ب.2 التقاطع مع x يكون عندما $f(x-3)=0$ ولكن بهذه النقاط g(x) غير معرّفة $\left(g(x)=\frac{1}{f(x-3)}=\frac{1}{0}=\infty\right)$

التقاطع مع y ← $x=0$ ولكن g(x) غير معرفة في $x=0$.

إذاً الدالة g(x) لا تقطع المحاور

ب.3 - نرسم رسم تقريبي للدالة f(x-3) ونحدد مجال المجالات التصاعدية والتنازلية لـ g(x).



* نقاط صفرية لـ f(x-3) هي نقاط تكون فيها g(x) غير معرفة

* مجال تصاعدي لـ f(x-3) هو تنازلي لـ g والعكس صحيح.

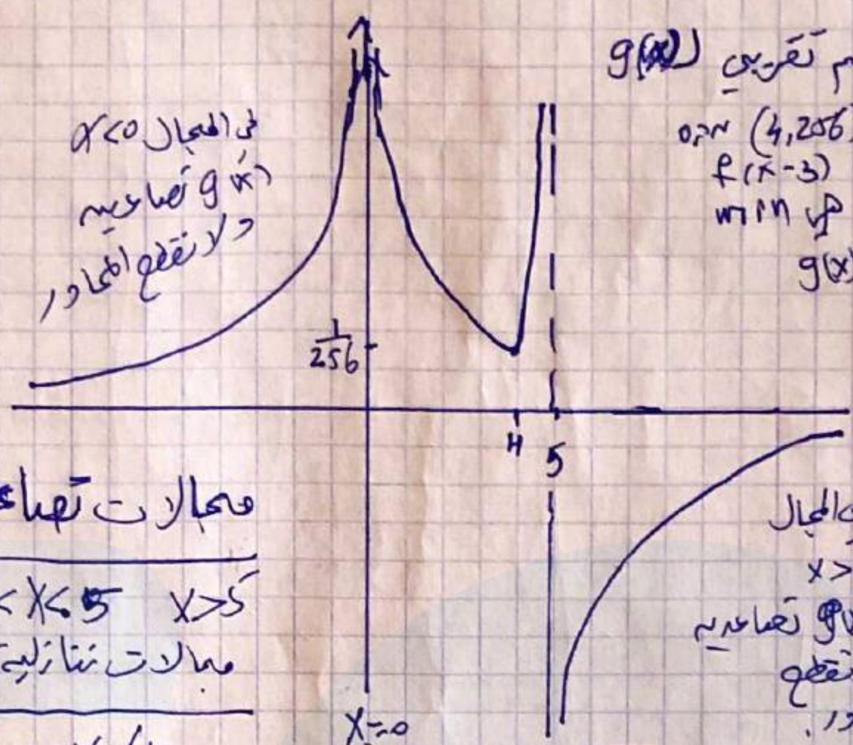
اذاً: مجالات تصاعدية لـ g:
$x<0$ او $4<x<5$ او $x>5$
مجالات تنازلية لـ g
$0<x<4$

4-ب

رسم تقريبي لـ $g(x)$

النقطة $(4,256)$ max للدالة $f(x-3)$ لذلك هي min لـ $g(x)$

في المجال $x<0$ $g(x)$ تصاعدية ولا تقطع المحاور



في المجال $x>5$ $g(x)$ تصاعدية ولا تقطع المحاور.

مجالات تصاعدية:

$x<0$, $4<x<5$, $x>5$

مجالات تنازلية:

$0<x<4$

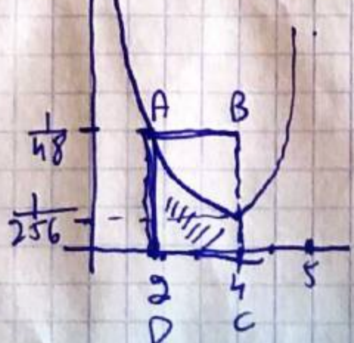
ج.1 نجد $f(-1)$ و $f(1)$

$$f(-1)=(-1+3)^4(2-(-1)) = 2^4\cdot 3=48$$
$$f(1)=(1+3)^4(2-1)=4^4=256$$

الدالة $f(x)$ متصلة وتصاعدية في المجال $-1\le x\le 1$

ولذلك $48\le f(x)\le 256$

ج.2 $\int_2^4 g(x)\,dx$ = عبارة عن المساحة المحصورة بين الدالة $g(x)$ والمحور x في المجال $2\le x\le 4$ (المساحة المخططة)



$$g(2)=\frac{1}{f(2-3)}=\frac{1}{f(-1)}=\frac{1}{48}$$

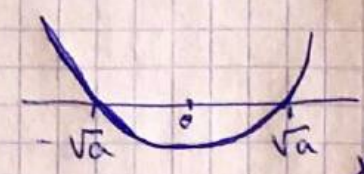
مساحة المستطيل ABCD هي $2\cdot\frac{1}{48}=\frac{1}{24}$

$\int_2^4 g(x)\,dx <$ المستطيل

اذاً $\int_2^4 g(x) < \frac{1}{24}$

حل سؤال 7

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$$



1. أ. اذا كان a موجب $(a>0)$

مجال التعريف $x \geq \sqrt{a}$ و $x \leq -\sqrt{a}$

اذا كان $a<0$ (سالب)

اذا مجال التعريف $x \neq 0$

2. مع المحور y لا يوجد، لأن الدالة غير معرفة في $x=0$.

تقاطع مع X:

اذا كان $a<0$ اذاً $\sqrt{x^2-a}>0$ دائماً، ولا يوجد تقاطع مع X.

إذا كان $a>0$ إذاً $x^2-a=0 \Leftarrow x=\sqrt{a}$ أو $x=-\sqrt{a}$

$(\sqrt{a},0)$ / $(-\sqrt{a},0)$

3. نبرهن أن $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2-a}}{(-x)^2}=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}=f(x)$$

اذاً $f(-x)=f(x)$ والدالة زوجية في كل مجال تعريفها

4. خطوط التقارب العمودية

I. $a>0$ لا يوجد   II. $a<0 \Leftarrow x=0$

خطوط التقارب الأفقية

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2} = \frac{|x| \cdot \sqrt{1}}{x^2} \to 0$$

$y=0$ هو خط تقارب افقي

في الحالتين $a>0$ او $a<0$

أ.(5) مجالات تصاعديه وتنازليه للدالة:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x^2-a}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2-a}} - \frac{2x \cdot \sqrt{x^2-a} \cdot \sqrt{x^2-a}}{\sqrt{x^2-a}}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2x(x^2-a)}{x^4 \sqrt{x^2-a}} = \frac{x^3 - 2x^3 + 2ax}{x^4 \cdot \sqrt{x^2-a}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-x^3+2ax}{x^4\sqrt{x^2-a}} = \frac{x(-x^2+2a)}{x^4 \cdot \sqrt{x^2-a}} = \frac{2a-x^2}{x^3 \cdot \sqrt{x^2-a}}}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2a - x^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{2a} \\ x_2 = -\sqrt{2a} \end{cases}$$

نُصنف النقاط. انتبه بإذا كان $a<0$ اذاً لا يوجد نقاط قصوى للدالة. وعندها بسط المشتق يحدد اشارة المشتق (المقام موجب دائماً)

البسط هو $2ax - x^3$ وفي المجال $x<0$ يكون موجب

وفي المجال $x>0$ يكون البسط سالب

اذاً المجال التصاعدي عندما $a<0$ هو $x<0$

والمجال التنازلي عندما $a<0$ هو $x>0$

(13)

إذا كان $a>0$ إذاً نقاط الشك $x=\pm\sqrt{2a}$

$$f'(x)=\frac{-x^3+2ax}{x^4\sqrt{x^2-a}}$$

بما أن البسط هو $-x^3+2a$ والمقام دائماً موجب

إذاً إشارة المشتقة الثانية تحدد بحسب إشارة مشتقة البسط في النقطة القصوى (الشك)

$$\text{البسط}=u(x)=-x^3+2ax$$

$$u'(x)=-3x^2+2a$$

في $x=-\sqrt{2a}$ $\rightarrow u'(-\sqrt{2a})=-3(-\sqrt{2a})^2+2a=3\cdot 2a+2a$

$$u'(-\sqrt{2a})=-4a$$

وبما أن a موجب إذاً $-4a$ سالب

وبالتالي $f''(-\sqrt{2a})<0$ والنقطة $x=-\sqrt{2a}$ هي max.

$$\boxed{\max\quad x=-\sqrt{2a}}$$

$$u'(+\sqrt{2a})=-3(-\sqrt{2a})^2+2a=-4a$$

أيضاً $\boxed{\max\quad x=\sqrt{2a}}$ (الدالة زوجية)

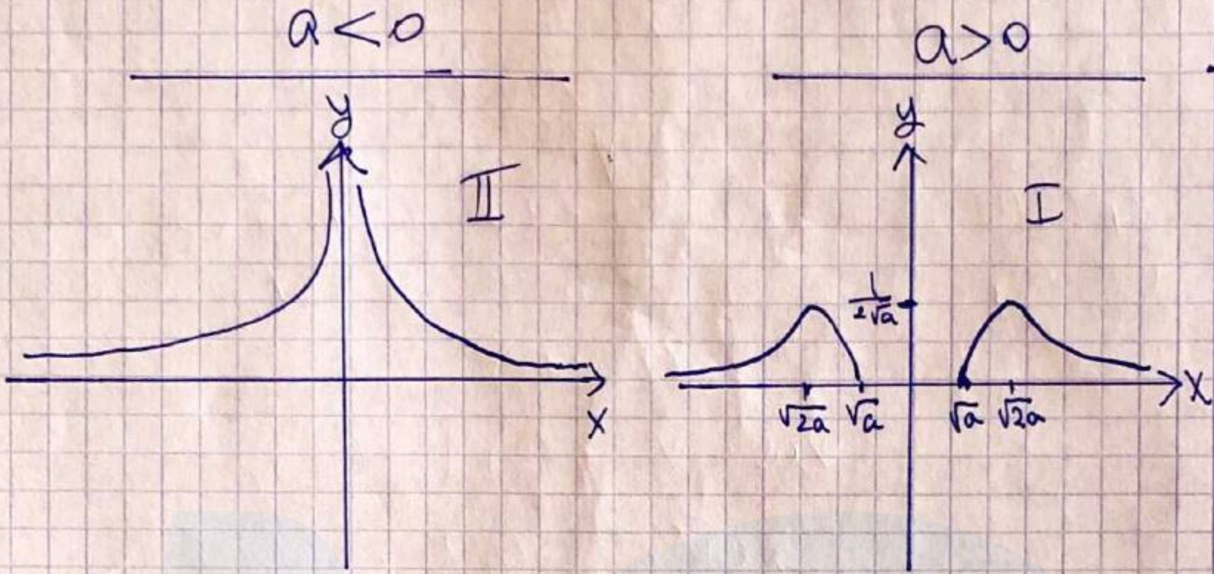
$$\underbrace{f(-\sqrt{2a})=f(\sqrt{2a})}_{\text{الدالة زوجية}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{2a})^2-a}}{(\sqrt{2a})^2}=\frac{\sqrt{2a-a}}{(\sqrt{2a})^2}=\frac{\sqrt a}{2a}=\frac{1}{2\sqrt a}$$

لتحديد المجالات التصاعدية والتنازلية نأخذ بالحسبان مجال التعريف $x>\sqrt a$ أو $x<-\sqrt a$

إذاً مجالات تصاعدية: $x\le-\sqrt{2a}$ أو $\sqrt a< x\le\sqrt{2a}$

مجالات تنازلية: $x>\sqrt{2a}$ أو $-\sqrt{2a}<x\le-\sqrt a$

ب.



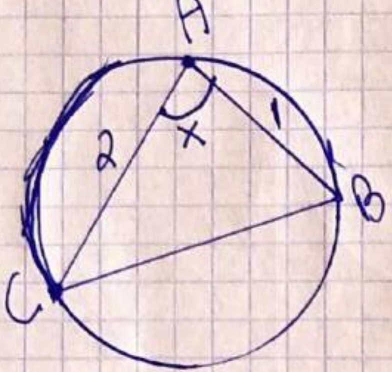
جـ. الرسم البياني في حالة $a>0$ ممكن ان يمس المستقيم $y=1$
اذا تحقق ان $\frac{1}{2\sqrt{a}}=1 \Leftarrow \frac{1}{2}=\sqrt{a} \Leftarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$

واذا كان $a>0$ او $a<0$ اي في كلاً من الحالتين
فإن المستقيم $y=1$ سيقطع الرسم في الامكانيات التالية :-

$0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ أو $a<0$

يقطع الرسم I يقطع الرسم II .

حل سؤال 8



(1.أ) نفرض أن نصف قطر الدائرة الحاصرة R.

حسب قانون ال cos

$$BC^2 = 2^2+1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot \cos x$$

$$BC^2 = 5-4\cos x$$

$$BC = \sqrt{5-4\cos x}$$

من جهة أخرى $\frac{BC}{\sin x} = 2R$ (حسب قانون ال sin)

$$BC = 2R\cdot \sin x$$

ينتج $2R\sin x = \sqrt{5-4\cos x}$

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}}$$

وهو المطلوب (أ)

(2.أ) $f(x) = \frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$ الدالة التي تعبر عن طول نصف القطر بدلالة x.

$$f'(x) = \frac{\frac{1\cdot 4\sin x}{\cancel{2}\sqrt{5-4\cos x}}\cdot \cancel{2}\sin x - 2\cos x\cdot\sqrt{5-4\cos x}}{4\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin^2 x}{\sqrt{5-4\cos x}} - \frac{2\cos x\cdot(5-4\cos x)}{\sqrt{5-4\cos x}}}{4\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x - 10\cos x + 8\cos^2 x}{4\sin^2 x\cdot(\sqrt{5-4\cos x})}$$

$$f'(x) = \frac{4\sin^2 x + \overbrace{4\cos^2 x + 4\cos^2 x}^{8\cos^2 x} - 10\cos x}{4\sin^2 x\cdot(\sqrt{5-4\cos x})} = \frac{4+4\cos^2 x - 10\cos x}{4\sin^2 x\cdot(\sqrt{5-4\cos x})}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4+4\cos^2 x - 10\cos x = 0$$

$4+4\cos^2 x-10\cos x=0$

نفرض $\cos x=t$ اذاً

$-1\le t\le 1$

$4t^2-10t+4=0$

نحل المعادلة حسب القانون نحصل على

$t_1=2$ $\qquad t_2=\frac{1}{2}$

غير ملائم

اذاً: $t=\cos x=\frac{1}{2}$

$x_1=60^\circ$ $\quad 0\le x\le 180$ زاوية مثلث

$x_2=300^\circ$ غير ملائم.

نفحص هل $x=60^\circ$ מקסימום/מינימום.

بما ان المقام في المشتق موجب دائماً لذلك اشارة المشتقة الثانية في النقطة القصوى تحدد حسب مشتق البسط

نجد مشتق البسط:

$$\left(4\cos^2 x-10\cos x+4\right)'=4\cdot 2\cos x(-\sin x)+10\sin x$$

$$=-8\cos x\cdot\sin x+10\sin x$$

$$x=60^\circ \to -8\cos(60^\circ)\cdot\sin(60)+10\cdot\sin 60=$$

$$-8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}>0$$

اذاً $x=60^\circ$ מינימום.

ب

$$R=f(60^\circ)=\frac{\sqrt{5-4\cos 60}}{2\sin 60}=\frac{\sqrt{5-2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$

$$\boxed{R=1}\Longrightarrow\boxed{2R=2}$$

القطر