حل نموذج بجروت

805-482

موعد (ب) 2020

طاقم الرياضيات

معهد IQ

بجروت رياضيات 482 - موعد "ب" - 2020

سؤال 1 :

$a_n: 3, 10, 17, 24, \ldots$

$b_n: 17, 38, 59, 80, \ldots$

(أ) ① نجد اولاً فرق المتوالية b_n.

$b_2 - b_1 = \text{فرق المتوالية } (d_1)$

$d_1 = 38 - 17 = \underline{21}$

حسب القانونية العامة للمتوالية الحسابية :

$b_n = b_1 + d(n-1)$

$\Rightarrow b_{30} = b_1 + d\cdot(30-1)$

$b_{30} = 17 + 21\cdot(29)$

$\boxed{b_{30} = 626}$

② نجد فرق المتوالية a_n.

$d = a_2 - a_1$

$d = 10 - 3 = \underline{7}$

حسب القانونية العامة للمتوالية الحسابية :

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$626 = 3 + 7(n-1)$

نجد n ,

$623 = 7n - 7$

$630 = 7n \Longrightarrow \boxed{n = 90}$

(ب) I. نفحص القول:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 7(n-1)$$

$$b_n = b_1 + d_1(n-1) = 17 + 21(n-1)$$

$$3a_n = b_n$$

$$3(3+7(n-1)) = 17 + 21(n-1)$$

$$9 + 21(n-1) = 17 + 21n - 21$$

$$9 + \cancel{21n} - \cancel{21} = 17 + \cancel{21n} - \cancel{21}$$

$$9 = 17 \quad X$$

اذاً هذا القول غير صحيح.

II. نفحص القول:

$$a_{3n} = a_1 + d(3n-1) = 3 + 7(3n-1)$$

$$b_n = b_1 + d_1(n-1) = 17 + 21(n-1)$$

$$a_{3n} = b_n$$

$$3 + 7(3n-1) = 17 + 21(n-1)$$

$$3 + \cancel{21n} - 7 = 17 + \cancel{21n} - 21$$

$$-4 = -4 \quad \checkmark$$

اذاً هذا القول صحيح.

$$S_{b_k}-S_{a_k}=924$$ (ج)

نجد S_{b_k} بدلالة k:

$$S_{b_k}=\frac{(2b_1+d_1(k-1))\cdot k}{2}$$

$$\boxed{S_{b_k}=\frac{(34+21(k-1))k}{2}}$$

نجد S_{a_k} بدلالة k:

$$S_{a_k}=\frac{(2a_1+d(k-1))k}{2}$$

$$\boxed{S_{a_k}=\frac{(6+7(k-1))k}{2}}$$

الآن نعوض في: $S_{b_k}-S_{a_k}=924$

$$\frac{(34+21k-21)k}{2}-\frac{(6+7k-7)k}{2}=924$$

$$\frac{k}{2}\cdot\left[34+21k\overbrace{-21-6}^{-27}-7k+7\right]=924$$

$$\frac{k}{2}\cdot[14+14k]=924$$

$$/:7 \quad \frac{k\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}[7+7k]=924$$

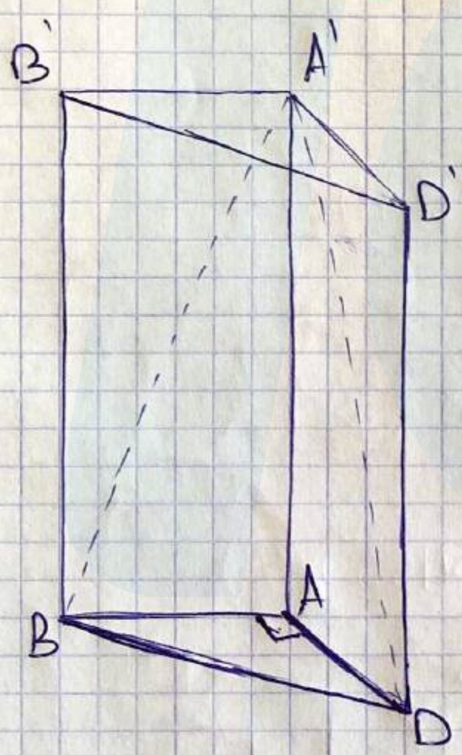
$$K + K^2 = 132$$

$$K^2 + K - 132 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-132)}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} \frac{22}{2} = \boxed{11} \\ -\frac{24}{2} = \boxed{-12} \end{cases}$$

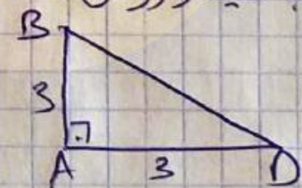
$K>0$ بالضرورة اذاً $\boxed{K=11}$.



سؤال 2 :

$$AB = AD = 3$$

(أ) حسب فيثاغورس :



$$(AB)^2 + (AD)^2 = (BD)^2$$

$$3^2 + 3^2 = BD^2$$

$$18 = BD^2$$

$$\boxed{BD = \sqrt{18}}$$

(ب) حسب تطابق المثلثات :

$\triangle A'AD \cong \triangle A'AB$ حسب ض.ز.ض :

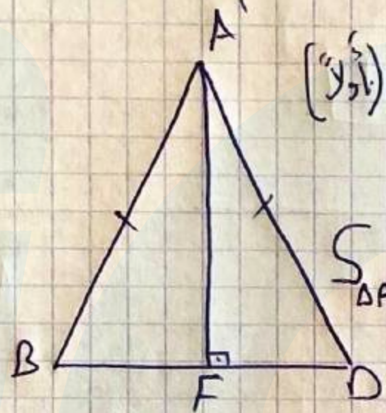
ضلع مشترك $A'A$ (1)

معطى $AD = AB$ (2)

(3) $\measuredangle A'AB = \measuredangle A'AD = 90°$

من هنا ينتج أن :

$\underline{\underline{A'D = A'B}}$.



(ج) نجد طول ارتفاع $\triangle BA'D$ (أولاً)

- $A'F$ هو الارتفاع.

$$S_{\triangle A'BD} = \frac{A'F \cdot BD}{2} = 15\sqrt{2}$$

$$\frac{A'F \cdot \sqrt{18}}{2} = 15\sqrt{2}$$

$$\frac{A'F \cdot \sqrt{9 \cdot 2}}{2} = 15\sqrt{2}$$

$$/\cdot \frac{2}{3} \quad \frac{A'F \cdot 3\cancel{\sqrt{2}}}{2} = 15\cancel{\sqrt{2}}$$

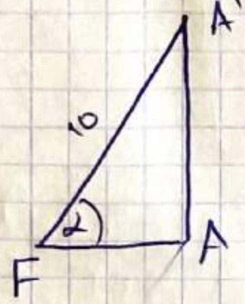
$$A'F = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 2}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{A'F = 10}$$

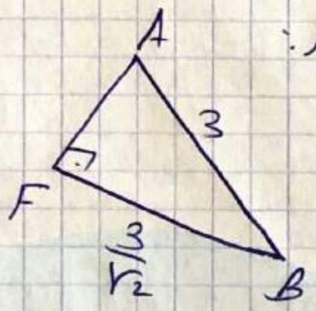
ثم نجد BF :

$$BF = \frac{BD}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

الزاوية المطلوبة في هذا السؤال:



نجد AF:



حسب فيثاغورس:

$(AF)^2+(FB)^2=(AB)^2$

$(AF)^2=9-4.5$

$\sqrt{AF^2}=\sqrt{5.5}$

$\boxed{AF=\sqrt{5.5}}$

الآن نجد α:

$\frac{AF}{A'F}=\sin(\alpha)$

$\frac{\sqrt{5.5}}{10}=\sin(\alpha)$

$\boxed{\alpha=77.75^\circ}$

(د) $V=\frac{AB\cdot AD}{2}\cdot AA'$

نجد AA': من $\Delta AA'F$ حسب فيثاغورس

$(AA')^2+\frac{9}{2}=100$

$(AA')^2=95.5$

$\boxed{AA'=\sqrt{95.5}}$

$\Rightarrow V=\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\sqrt{95.5}$

سؤال 3:

$$f(x) = \sin(2x)+4$$

في المجال: $0 \le x \le \pi$

(أ) $f'(x) = 2\cos(2x)$

$0 = 2\cos(2x)$

$\cos(2x) = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

ملاحظة:
لا حاجه لفحص
الحل السالب لأن
الدالة معرفة في مجال موجب.

$\underline{k=0}$ $x = \frac{\pi}{4}$

$\underline{k=1}$ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$\underline{k=2}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ X خارج المجال

$f(0) = \sin(0)+4 = 4.$

$f(\frac{\pi}{4}) = \overbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}^{1}+4 = 5$

$f(\frac{3\pi}{4}) = \overbrace{\sin(\frac{3\pi}{2})}^{-1}+4 = 3$

$f(\pi) = \overbrace{\sin(2\pi)}^{0}+4 = 4$

$\Leftarrow$ $(0,4)$, $(\frac{\pi}{4},5)$, $(\frac{3\pi}{4},3)$, $(\pi,4)$.

	$x=0$	$0 \le x < \frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$	$x=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} < x \le \pi$	$x=\pi$
	0			0.5π			π
f'	⊗ لو	+	0	−	0	+	لو
f	min طرف	↗	max	↘	min	↗	max طرف

$(0,4)$ min

$(\frac{\pi}{4},5)$ max

$(\frac{3\pi}{4},3)$ min

$(\pi,4)$ max

(ب)

(ج) تقاطع مع محور ~~X~~ من البند السابق :

$\boxed{\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}$

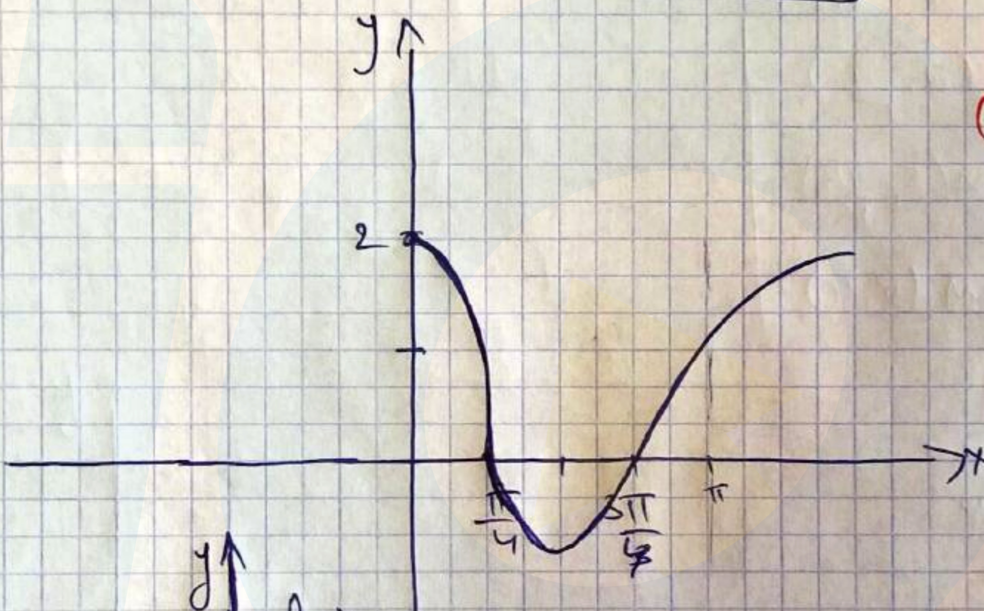
$\boxed{\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)}$. $\Leftarrow$ $f'(x)=0$ هي نقاط قصوى للدالة .

تقاطع مع محور ~~y~~ :

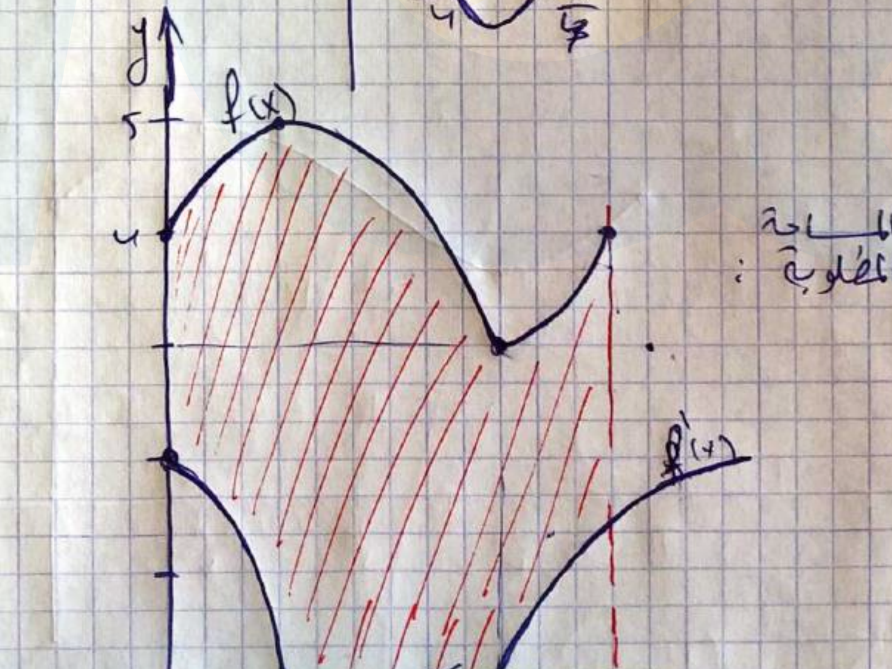
$f'(0) = \overset{1}{\cos(2\cdot 0)} \cdot 2 = 2$

$\boxed{(0,2)}$

(د)



(هـ) المساحة المطلوبة :



نفرض المساحة المطلوبة هي S.

$$S = \int_0^{\pi} f(x)\,dx - \int_0^{\pi} f'(x)\,dx = \int_0^{\pi} [f(x) - f'(x)]\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(2x) + 4 - 2\cos(2x)\,dx = \boxed{-\frac{\cos(2x)}{2} + 4x - \sin(2x)}$$

$$\left[-\frac{\cos(2\pi)}{2} + 4\pi - \cancel{\sin(2\pi)}^{0}\right] - \left[\overset{-\frac{1}{2}}{-\frac{\cos(0)}{2}} + 0 - \cancel{\sin(0)}\right] =$$

$$-\frac{1}{2} + 4\pi + \frac{1}{2} = \boxed{4\pi}$$

السؤال 4:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{a-x}$$

(أ) $a - x \neq 0$

مجال التعريف. $\boxed{x \neq a}$

(ب) $x=1$ نقطة قصوى: $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} \cdot 2)(a-x) - (-1) \cdot e^{2x}}{(a-x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^{2x}(2a - 2x + 1)}{(a-x)^2}}$$

$$0 = \frac{e^2(2a - 2 + 1)}{(a-1)^2} \Rightarrow \frac{e^2(2a-1)}{(a-1)^2} = 0$$

البسط $= 0$ عندما $(2a-1) = 0$:

$2a = 1$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{2x}}{\frac{1}{2}-x}}$$

$a=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}\left(2\cdot\frac{1}{2}-2x+1\right)}{(a-x)^2}$$

نعوض في f' $a=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2-2x)}{(a-x)^2}$$

$$f'(x)=0=e^{2x}(2-2x)$$

اكبر من صفر لكل المجال التعريف

لذلك يجب أن يتحقق:

$$\cancel{2}2-2x=0$$

$$1-x=0$$

$$\boxed{x=1}$$

اذاً لا توجد نقاط قصوى إضافية للدالة $f(x)$.

(جـ) 1

$$a=x$$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2\cdot\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{e}{0}=$$ خط تقارب عامودي.

$x=\frac{1}{2}$.

2 تقاطع مع محور x: $(x,0)$:

$$0=\frac{e^{2x}}{\frac{1}{2}-x}\longrightarrow$$ عامل الـ $e>0$ لكل الـ مجال التعريف

اذاً لا يوجد x يحقق المعادلة بالتالي لا يوجد تقاطع مع محور x.

تقاطع مع محور y: $(0,y)$:

$$f(0)=\frac{e^0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\boxed{(0,2)}$$

	0 $x<\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	0.75 $\frac{1}{2}<x<1$	$x=1$	2 $x>1$
$f'(x)$	+		+	0	-
$f(x)$	↗		↗		↘

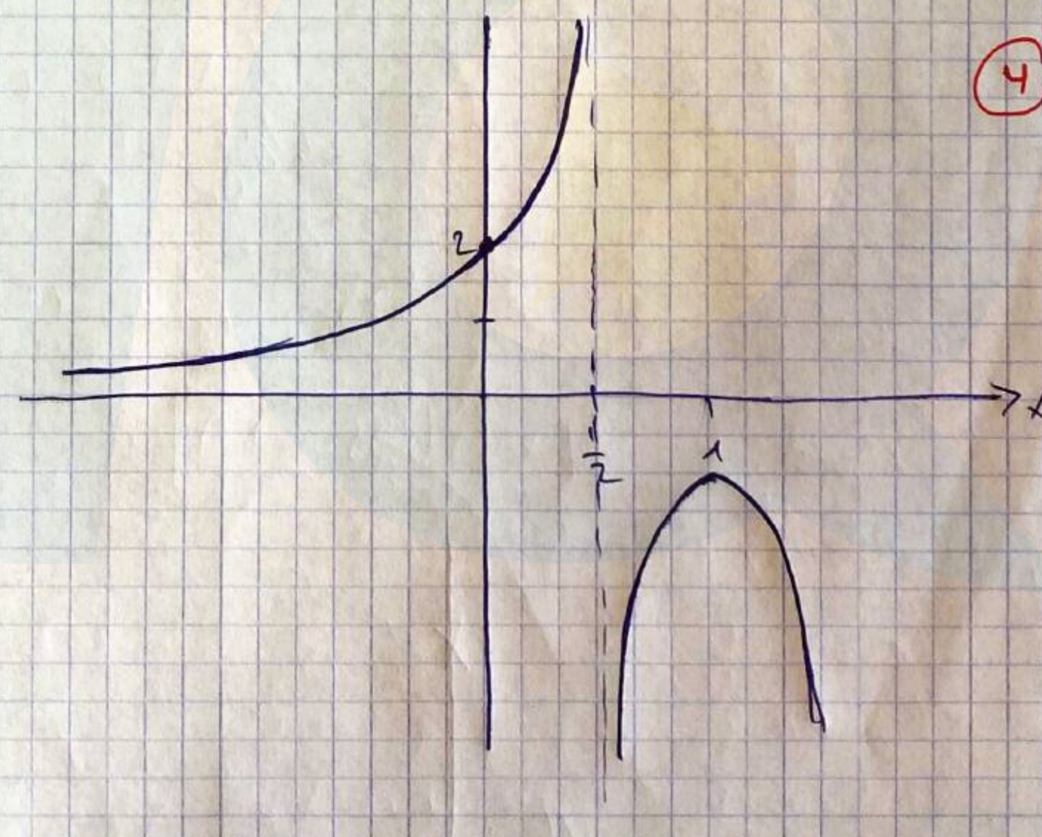
3)

$$f'(0) = \frac{e^0(2-0)}{(0.5)^2} = \frac{+}{+} = +$$

$$f'(0.75) = \frac{e^{1.5}(2-1.5)}{(0.5-0.75)^2} = \frac{+}{+} = +$$

$$f'(2) = \frac{e^4(2-4)}{(0.5-2)^2} = \frac{-}{+} = -$$

4)



(د) $g(x)=-2f(x)$ ← بما انها ضربنا f بـ -2 اذاً ستتبدل المجالات الموجبة والسالبة
واحداثيات x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$ هي ذاتها للدالة $f(x)$.
لكن نوع النقاط سيتغير من مكسيموم الى مينيموم وبالعكس.

$$g(1) = -2\cdot f(1) = -2\cdot\frac{e^2}{0.5-1} = -2\cdot(-2)e^2 = 4e^2$$

اذاً $(1, 4e^2)$

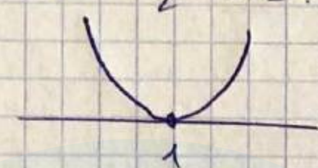
سؤال 5 :

$$f(x)=5\ln(x^2-2x+1)$$

(أ) ① $x^2-2x+1>0$ (مجال تعريف الـ ln هو x موجب)

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1}}{2}=$$

$$\frac{2\pm0}{2}=\underline{1}.$$



$$\boxed{x\neq1}$$

②

$$f(1)=5\cdot\ln(1^2-2\cdot1+1)$$

$$f(1)=5\cdot\ln(0)=$$ خط تقارب عامودي

$$\boxed{x=1}$$

ب) نجد النقاط القصوى ، ومنها نجد المجالات التصاعدية والتنازلية

$$f'(x)=\frac{5\cdot(2x-2)}{x^2-2x+1}$$

$$f'(x)=0$$

$$0=\frac{10(x-1)}{x^2-2x+1}$$

$$x-1=0$$

$$\cancel{\boxed{x=1}}$$

لا يوجد نقاط قصوى للدالة .

ولذلك الدالة ستكون اما تصاعدية او تنازلية في كل واحد من اجزاء مجال التعريف وبما ان مجال التعريف هو $x\neq1$ اذاً نفحص المجالين $x>1$ و $x<1$

	$x<1$	$x=1$	$x>1$
	0		2
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(0) = \frac{10(0-1)}{0-0+1} = \frac{-}{+} = -$$

$$f'(2) = \frac{10(2-1)}{4-4+1} = \frac{+}{+} = +$$

مجال تصاعدي. $\boxed{x>1 \;:\; \uparrow}$

مجال تنازلي. $\boxed{x<1 \;:\; \downarrow}$

(ج) تقاطع مع محور x:

$0 = 5\cdot \ln(x^2-2x+1)$

$\ln(x^2-2x+1) = 0$

$x^2-2x+\cancel{1} = \cancel{1}$

$x(x-2) = 0$

$\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2}$

$\boxed{(2,0)}$ و $\boxed{(0,0)}$

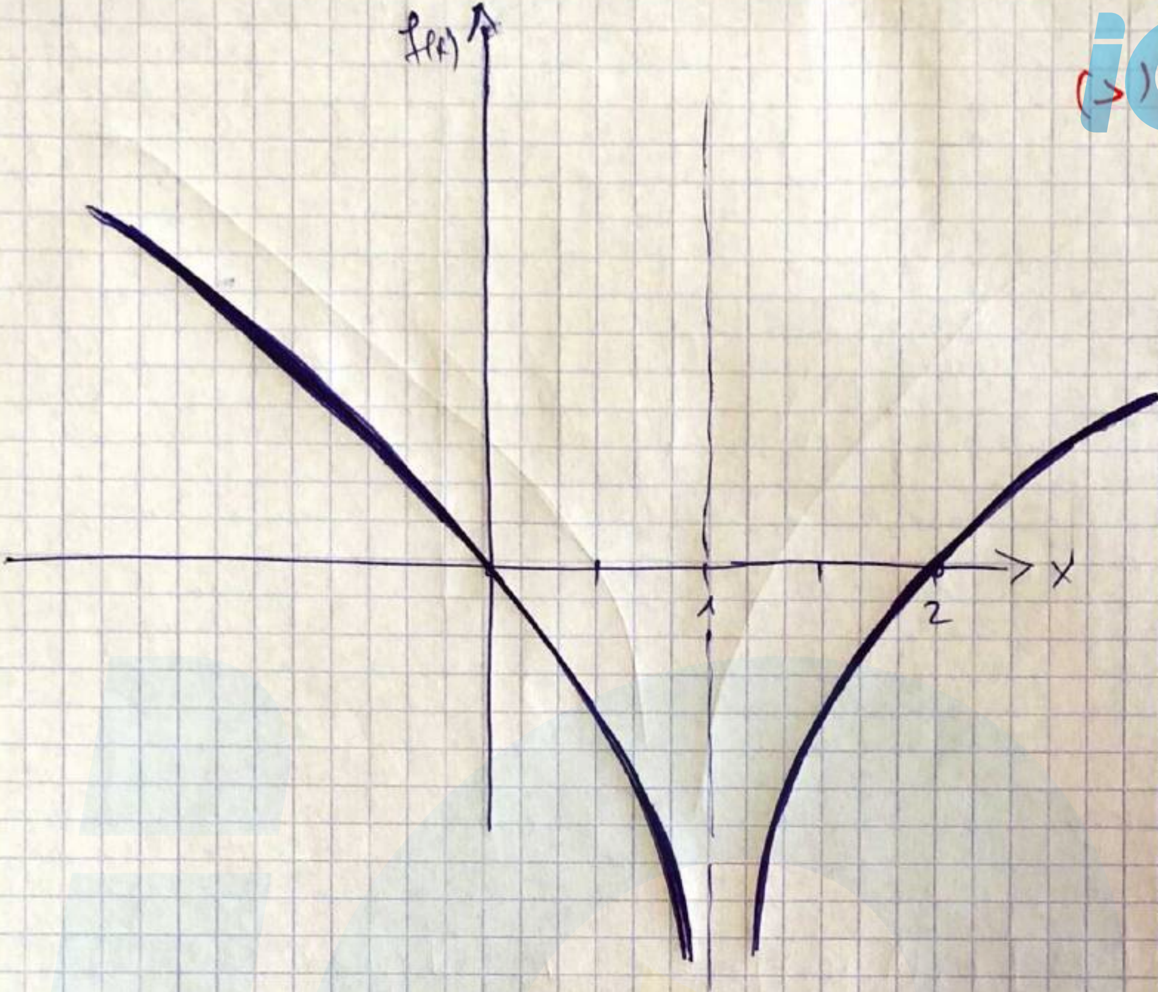
تقاطع مع محور y:

$y = 5\cdot\ln(1) =$

$\underline{y=0}$

$\boxed{(0,0)}$

(د)



(هـ) $g'(x)=f(x)$ وبالتالي $g'(x)=0$ عندما يتحقق أن:

$g'(x)=f(x)=0$ ،

وهذا يتحقق عندما: $x=2$ و $x=0$.

حسب الرسمة نستنتج متى $g'>0$ أو $g'<0$

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$(f(x))\ g'(x)$	+	0	−		−	0	+
$g(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗

Min , $x=2$

Max , $x=0$.