# حل نموذج بجروت

# 807-582

# موعد شتاء 2020

# طاقم الرياضيات

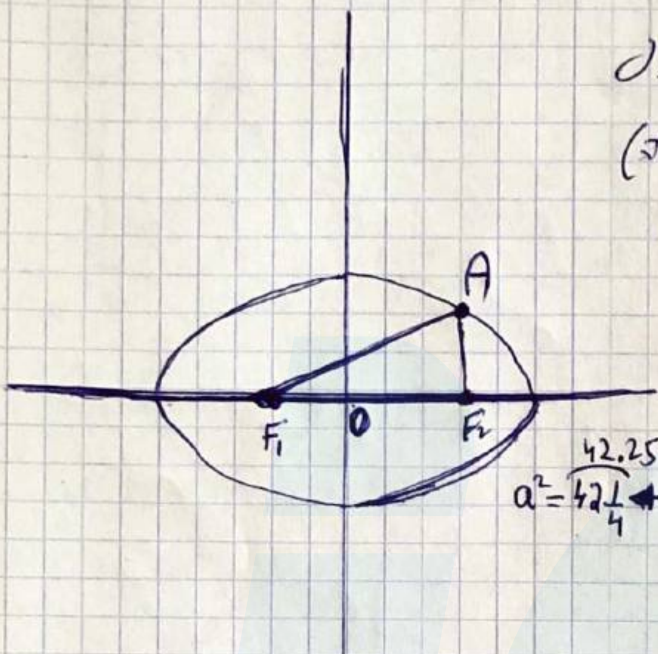
# معهد IQ

حل نموذج 582 - (807)

موعد شتاء 2020

حل سؤال 1

1. أ. بحسب معطيات السؤال:




النقطة A موجودة في الربع الأول

وتقع على القطع الناقص (אליפסה)

$a>b \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ويتحقق أن طول المحور الرئيسي

للقطع الناقص هو 13

أي: $2a=13 \Leftarrow a=6.5 \rightarrow a^2=\overset{42.25}{42\frac{1}{4}}$

$F_1$ و $F_2$ هما بؤرتا (מוקדי)

القطع الناقص (אליפסה)

معطى أيضاً أن محيط المثلث $AF_1F_2$ هو 25 ومساحته هي 12

اذاً يتحقق: $\overline{AF_1}+\overline{AF_2}+\overline{F_1F_2}=25$ , $\overline{F_1F_2}=2c$ , $\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=2a$

أي: $2a+2c=25 \leftarrow 2a=13 \leftarrow 13+2c=25 \leftarrow \ldots \leftarrow \boxed{c=6}$

من هنا يمكننا إيجاد إحداثيات البؤرتين (מוקדים)

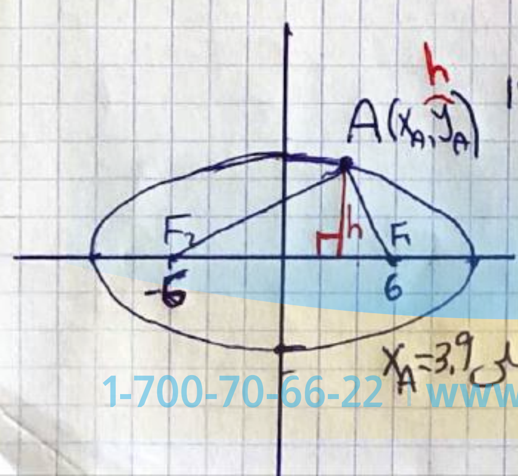
$F_1=(-6,0)$ و $F_2(6,0)$ . وبما انه في كل אליפסה يتحقق ان:

$$a^2-b^2=c^2$$

اذاً: $42.25-b^2=36 \Longleftarrow \ldots \leftarrow b^2=6.25$

وبالتالي معادلة الאליפסה هي: $\boxed{\frac{x^2}{42.25}+\frac{y^2}{6.25}=1}$

ب. نجد احداثيات النقطة A:




مساحة المثلث $AF_1F_2$ هي $12=\frac{\overline{F_1F_2}\cdot h}{2}$

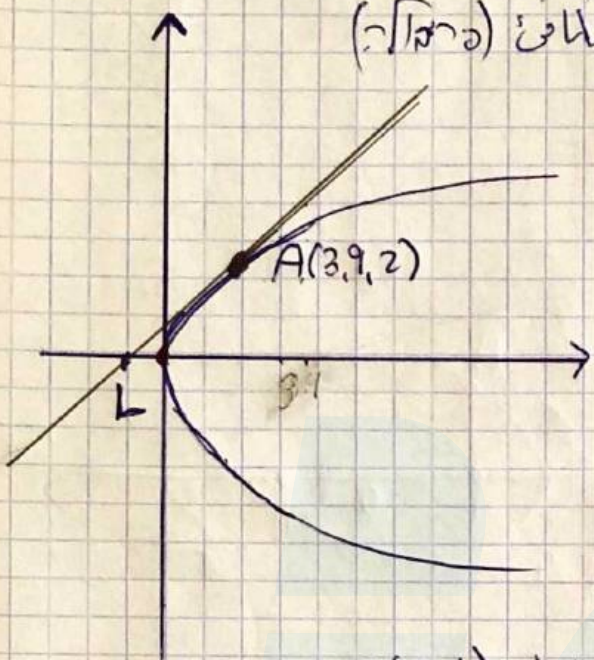
$F_1F_2=2a=12$ اذا يتحقق $12=\frac{12h}{2} \leftarrow h=2$

اذاً $\boxed{y_A=2}$ $(h=y_A)$ . نعوض $y_A=2$ في

معادلة الאליפסה ونجد $x_A$ . نحصل على $x_A=3.9$

اذاً $A(3.9,2)$

ج. من النقطة A نرسم مماس للقطع المكافئ $y^2=2px$ ($p>0$ وليس صحيحًا)
المماس يقطع القطع المكافئ (ومحوره) في النقطة L




نعوض النقطة A في معادلة القطع المكافئ (ومحوره):
ونجد p:

$$2^2=2p\cdot(3.9) \Rightarrow \boxed{p=\frac{20}{39}}$$

اذًا معادلة الـ (ومحوره) هي:

$$y^2=2\cdot\frac{20}{39}x$$

$$\boxed{y^2=\frac{40}{39}x}$$

معادلة المماس للقطع المكافئ في النقطة $A(x_A,y_A)$ هي:

$$y\cdot y_A=p(x+x_A)$$

نعوض ونجد المعادلة:

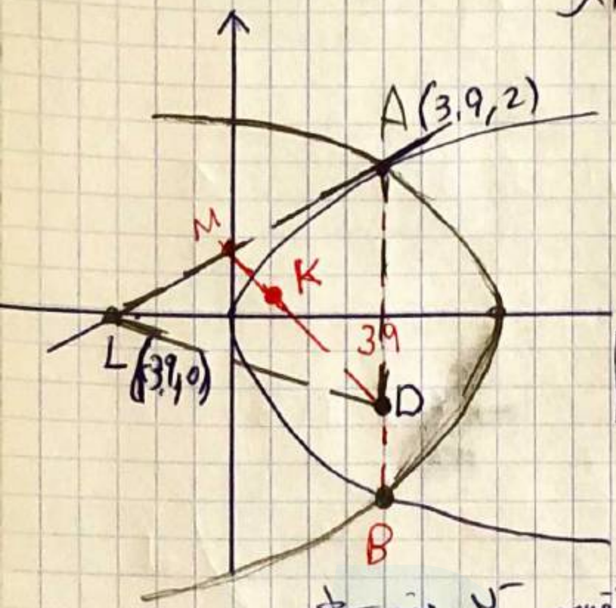
$$y\cdot 2=\frac{20}{39}(x+3.9) \Longrightarrow \boxed{y=\frac{10x}{39}+1}$$

L هي تقاطع المماس مع المحور x أي $L:(x_L,0)$ ، نعوض $y=0$
في معادلة المماس ونحصل على: $\boxed{x=-3.9}$ $L(-3.9,0)$

ملاحظة: الأحداثي x لنقطة تقاطع المماس المرسوم للقطع مكافئ في نقطة معينة هو مضاد نقطة التماس
أي بما ان نقطة التماس هي $A(3.9,2)$ لذلك $L(-3.9,0)$
المضاد

وهذا صحيح لكل قطع مكافئ
لانه يتحقق في التقاطع مع x (نعوض $y=0$) في صورة المعادلة المماس نحصل على: $y\cdot 0=2p(x_L+x_A) \Rightarrow 0=2p\underbrace{(x_L+x_A)}_{0}$

اذًا $x_L+x_A=0 \Rightarrow \boxed{x_L=-x_A}$




د. بما أن المنحنيات: دالة [illegible]

لذلك النقاط تقاطعهم نفس الإحداثي X

والإحداثي y للنقطة B سيكون

مضاد الإحداثي y لنقطة A

إذاً $B(3.9,2)$

من هنا معادلة AB هي $\boxed{AB: x=3.9}$

والإحداثي X للنقطة D أيضاً

إذاً النقطة $D(3.9, y_D)$

نقطة التقاء المتوسطات في المثلث تقسم كل متوسط

بنسبة 2:1 لصالح جهة الرأس.

وبما أن الإحداثي X للنقطة D ثابت لذلك الإحداثي X لنقطة

التقاء المتوسطات سيكون ثابت ويمكننا إيجاده مباشرةً

بواسطة النقطتان A و L إذ أن المستقيم المتوسط

للضلع AL سيمر بالنقطة M التي هي منتصف AL (انظر الرسم)

M منتصف AL وإحداثياتها هي: $x_m = \frac{-3.9+3.9}{2} = 0$ و $y_m = \frac{2+0}{2} = 2$

إذاً $M(0,1)$

لنفرض أن نقطة التقاء المتوسطات هي K إذاً $X_K = \frac{2X_m + X_D}{3}$

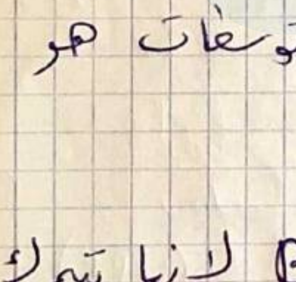
أي أن $X_k = \frac{1\cdot(3.9)+0}{3} \longrightarrow X_k = 1.3$

وبالتالي معادلة المحل الهندسي لكل نقاط التقاء المتوسطات هو

مستقيم معادلته $\boxed{X=1.3}$

<u>ملاحظة:</u> النقطة D ممكن أن تقع على النقطة B لأنها تشترك

على المستقيم AB ولذلك في هذا الوضع الخاص




سيكون المثلث ABD هو نفسه ALB

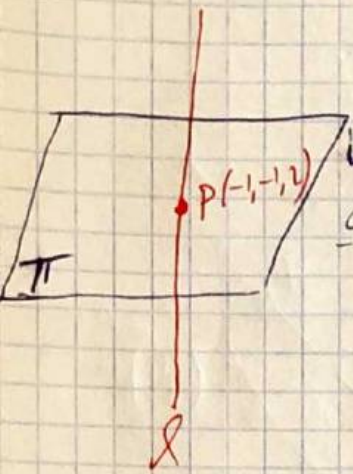
وبهذه الحالة المثلث متساوي الساقين و LM

هو متوسط فيه $M(3.9,0)$ منتصف BD

وبالتالي إحداثيات K هي $K:(1.3,0)$ ومعادلة المحل

الهندسي (بالاعتماد على الشرح السابق) هي $X=X_k$ أي $\boxed{X=1.3}$

حل سؤال 2




أ. بحسب المعطيات فإن المستقيم l يمر بأصل المحاور O

ويعامد المستوى π. وكذلك P(−1,−1,2) هي تقاطعهما

بما أن l يمر بأصل المحاور إذاً تمثيله البارامتري

من الصورة:

$$l: \underline{x} = t(-1,-1,2)$$

المستوى π معادلة من الصورة:

$$\pi: ax+by+cz+D=0$$

بحيث (a,b,c) هو متجه يعامد المستوى

وبما أن l يعامد المستوى إذاً $(a,b,c)=(-1,-1,2)$

أي ان المتجه $(-1,-1,2)$ يعامد π من هنا:

$$\pi: -1\cdot x-1\cdot y+2z+D=0$$

P تقع على المستوى، نعوض النقطة P في معادلة المستوى:

$$-1\cdot(-1)-1(-1)+2\cdot 2+D=0 \Longrightarrow D=-6$$

إذاً معادلة المستوى π هي

$$\boxed{\pi: -x-y+2z-6=0}$$

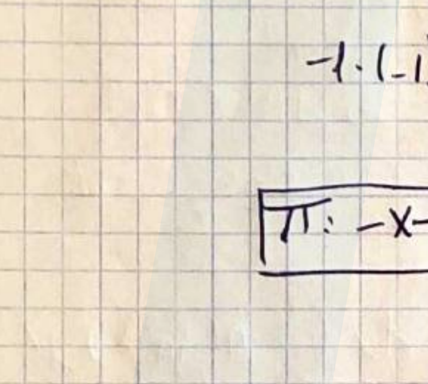
ب.1 بحسب معطيات البند (ب)

OABCD هو هرم قائم قاعدته المستطيل ABCD

بحيث ABCD محوي في المستوى π و O أصل المحاور.

A هي نقطة تقاطع π مع المحور x ⟵ نعوض في معادلة المستوى $A:(-6,0,0)$

B هي نقطة تقاطع π مع المحور y ⟵ " " " " $B:(0,-6,0)$




ب.2 بما أن الهرم قائم لذلك ارتفاع الهرم

سوف يمر بمركز الدائرة المحيطة

للقاعدة. وبما أن القاعدة مستطيل و l

يعامد المستطيل (π) لذلك الارتفاع

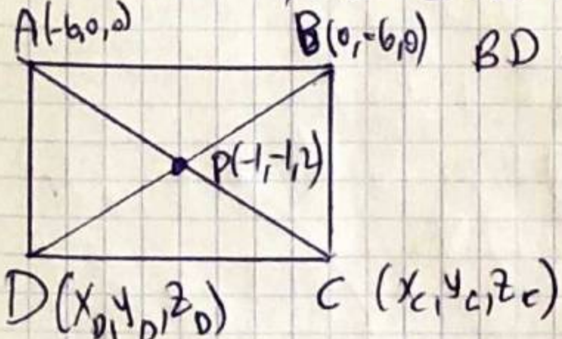
سيقطع π في P وهي مركز الدائرة

المحيطة. و P هي أيضاً بهذه الحالة نقطة التقاء أقطار

المستطيل، وأقطار المستطيل تنصف بعضها إذاً نجد احداثيات

⑤ الرؤوس D و C بواسطة قانون منتصف قطعة

اذ أن P هي منتصف AC ومنتصف BD




$x_p = \frac{x_B + x_D}{2} \longrightarrow x_D = 2x_p - x_B$

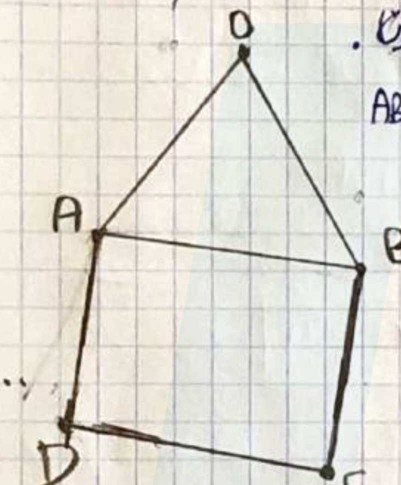
$y_p = \frac{y_B + y_D}{2} \longrightarrow y_p = 2y_p - y_B$

$z_p = \frac{z_B + z_D}{2} \longrightarrow z_p = 2z_p - z_B$

نعوض ونحصل على $D:(-2,4,4)$

ونفس الاسلوب نجد C : $C:(4,-2,4)$

ج. تذكر أن الزاوية بين مستويين هي الزاوية المحصورة بين عمودين النازلين على مستقيم تقاطع المستويين.




مستقيم التقاطع بين المستوى OAB والقاعدة ABCD هو AB.

بما أن l عموديا على القاعدة لذلك المتجه العمودي على القاعدة هو (-1,-1,2)

(وهو عموديا على AB ايضا)

نجد متجه عمودي على المستوى OAB

نفرض ان المتجه $u(u_1,u_2,u_3)$ عموديا على OAB اذا:

$\vec{OA}\cdot u = 0 \Longrightarrow \vec{OA} = (-6,0,0) \Longrightarrow \vec{OA}\cdot u = -6u_1 = 0 \to u_1 = 0$

وايضا $\vec{OB}\cdot u = 0 \Longrightarrow \vec{OB} = (0,-6,0) \Longrightarrow \vec{OB}\cdot u = -6u_2 = 0 \to u_2 = 0$

اذا $u=(0,0,u_3)$ نختار $u_3 = 1$ اذا $u=(0,0,1)$

وبالتالي الزاوية بين المستويين OAB و ABCD هي الزاوية بين المتجهين $u=(0,0,1)$ و $l:(-1,-1,2)$ وبتحقق:

$$\cos\alpha = \frac{|l\cdot u|}{|l|\cdot|u|} = \frac{|(-1,-1,2)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{6}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \longrightarrow \boxed{\alpha = 35.26^\circ}$$

$G(-2,-4,0)$ $F(-4,-2,0)$

$\overrightarrow{FG} = (-2-(-4), -4-(-2), 0-0) = (2,-2,0)$

$\boxed{\overrightarrow{FG} = (2,-2,0)}$ , $\overrightarrow{AB} = (0-(-6), -6-0, 0-0)$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = (6,-6,0)}$

$|\overrightarrow{FG}| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

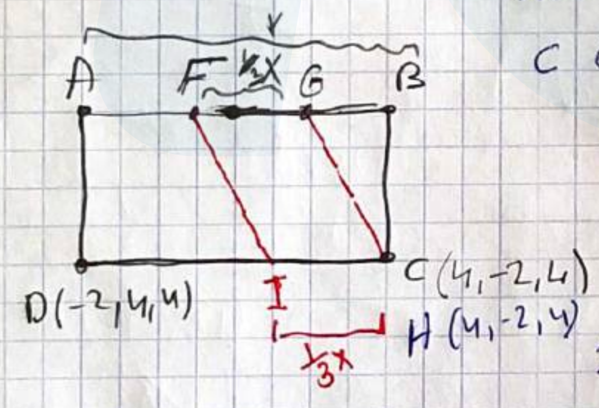
$2\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2}$

أي $|\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$

وهو المطلوب د.1

2.د مطلوب أن نجد نقطتان H و I على القاعدة ABCD بحيث ينتج لدينا هرم OFGHI ($H,G$ تقع على $\overrightarrow{AB}$) يكون الحجم مساوٍ لـ $\frac{1}{3}$ حجم OABCD

انتبه الى أن رأس الهرم هو O نفسه وبالتالي ارتفاع الهرمين متساوٍ، لذلك نختار نقطتين H و I بحيث نحصل على مستطيل (أو متوازي أضلاع) تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة ABCD




نختار النقطة H ان تكون نفس الرأس C ونجد احداثيات I بحيث يتحقق أن

$HI = \frac{1}{3}DC$

لتكن $I(x_I, y_I, z_I)$

النقطة I تقسم DC بنسبة 1:2 (بحيث I أقرب الى C) ولذلك بحسب قانون تقسيم قطعة بنسبة معطاة يجب ان يتحقق

$x_I = \frac{1 \cdot x_D + 2x_C}{3} = \frac{1(-2)+2(4)}{3} = 2$

$y_I = \frac{1 \cdot 4 + 2(-2)}{3} = 0$

$z_I = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 4}{3} = 4$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} I:(2,0,4) \\ H:(4,-2,4) \end{array}}$

حل سؤال 3 :

أ. $Z^3=-1$ , $-1=1\cdot cis\,180^\circ$

$Z^3=-1=1cis\,180^\circ$

$Z_k=\sqrt[3]{1}\cdot cis\left(\frac{180^\circ}{3}+\frac{360^\circ k}{3}\right)$ بحسب ديموافر

$Z_k=1\ cis\,(60+120^\circ k)$

$Z_0=1\ cis\,60$

$Z_1=1\ cis\,180^\circ$

$Z_2=1\ cis\,300^\circ$

ب. $q=2i$ / $2i=2cis\,90^\circ$

إذاً: $q=2\,cis\,90^\circ$

$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \Longrightarrow a_n=a_1\cdot(2i)^{n-1}$

$a_{n+4}=a_1\cdot(2i)^{n+4-1}=a_1\cdot(2i)^{n+3}=\underbrace{a_1\cdot(2i)^{n-1}}_{a_n}\cdot\underbrace{(2i)^4}_{16}$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+4}=16a_n}$

ج. رؤوس الشكل الرباعي (ABCD) أ. A يقع في الربع الأول

$A=a_1=cis\,60^\circ$ تقع بالربع I

$\boxed{q=2i=2cis\,90^\circ}$

$B=a_2=a_1\cdot q=2\,cis\,60^\circ\cdot 2cis\,90^\circ=2cis\,150^\circ$

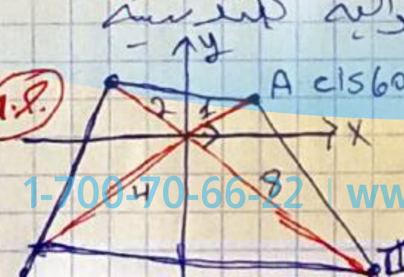
$C=a_3=a_2\cdot q=2cis\,150^\circ\cdot 2\,cis\,90^\circ=4cis\,240^\circ$

$D=a_4=a_3\cdot q=4cis\,240^\circ\cdot 2cis\,90^\circ=8\,cis\,330^\circ$

إذاً:

$\boxed{D=8cis330^\circ}$ $4\sqrt3-4i$   $\boxed{C=4\,cis\,240^\circ}$ $-2-2\sqrt3 i$   $\boxed{B=2cis150^\circ}$ $-\sqrt3+i$   $\boxed{A=cis60}$ $\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$

نلاحظ بأنّ رؤوس الشكل الرباعي عبارة عن متوالية هندسية




فيها $q=2$ دال arg عبارة عن متوالية حسابية فرقها $90^\circ$

إذاً الشكل الرباعي أقطاره متعامدة

$S_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$

P. -2

د) الرؤوس $A', B', C', D'$ هي الحدود $a_5, a_6, a_7, a_8$ على التوالي لأنه

وحسب ما شرحنا بخصوص الرؤوس $A, B, C, D$

دوران بين كل حدين متتاليين هو $90°$ و $q=2$ اذاً

$$\cancel{a_5}: \quad a_4 = 8\,cis\,330° \rightarrow a_5 = 2\cdot 8\,cis\,(330°+90°) = 16\,cis\,420 = \boxed{16\,cis\,60}$$

اذاً $\overset{A'}{a_5 = 16\,cis\,60°}$ وايضاً $\overset{B'}{a_6 = 32\,cis\,150°}$ و $\overset{C'}{a_7 = 64\,cis\,240°}$ $\overset{D'}{a_8 = 128\,cis\,330}$

اذاً:

$$\boxed{\begin{aligned} A' &= a_5 = 16\,cis\,60° \\ B' &= a_6 = 32\,cis\,150° \\ C' &= a_7 = 64\,cis\,240° \\ D' &= a_8 = 128\,cis\,330° \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow A'C' = 16 + 64 = 80$$

$$B'D' = 32 + 128 = 160$$

الشكل $A'B'C'D'$ اقطاره متعامدة ولذلك

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{2}$$

$$= \frac{80 \cdot 160}{2} = 6400$$

والنسبة بين مساحة الشكلين الرباعيين هي:

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{6400}{25} = 256$$

حل سؤال 4

$f(x)=e^{\left(\frac{a}{x-1}\right)}+c$ بارامترات $a,c$

أ- مجال تعريف الدالة $x\neq 1$ $(x-1\neq 0)$

ب- بما أن المستقيم $y=1$ هو خط تقارب للدالة لذلك يتحقق:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{a}{\infty-1}}+c=e^0+c=1+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$\boxed{\frac{a}{\infty-1}=0}$$

بما أن نقطة التقاطع مع المحور $y$ هي $(0,e^{-4})$ أي $f(0)=e^{-4}$

نعوض بالدالة:

$$f(0)=e^{\frac{a}{0-1}}=e^{-a}=e^{-4}\rightarrow -a=-4$$

وبالتالي $\boxed{a=4}$

وبالتالي $\boxed{c=0}$ $\boxed{a=4}$ والدالة هي: $\boxed{f(x)=e^{\frac{4}{x-1}}}$

ج.1

$$f'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{4}{x-1}}\overset{?}{=}0$$

التعبير $e^{\frac{4}{x-1}}$ دائماً موجب والتعبير $(x-1)^2$ دائماً موجب ضمن مجال تعريف الدالة $(x\neq 1)$ وبالتالي لا يوجد نقاط صفرية للمشتقة ولكن التعبير $\frac{-4}{(x-1)^2}$ هو دائماً سالب لذلك $f'(x)$ ستكون سالبة لكل $x$ ضمن مجال تعريف الدالة، أي أن الدالة $f(x)$ ستكون تنازلية لكل $x\neq 1$. $(x>1$ أو $x<1)$ وواضح أنه لا يوجد مجالات تصاعدية للدالة.

ج.2 الدالة $f(x)=e^{\frac{4}{x-1}}$، التعبير $e^{\frac{4}{x-1}}$ دائماً موجب وبالتالي الدالة موجبة في كل مجال تعريفها أي لكل $x\neq 1$

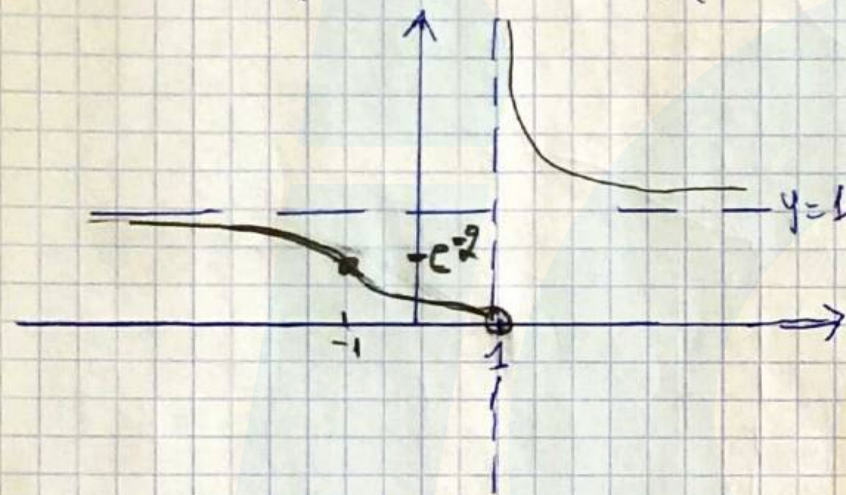
١٠) ج

لكي نرسم الدالة يجب ان نجد كيف تتصرف الدالة بجوار $x=1$.
نفحص القيمه التي تقترب منها الدالة بجوار $1^+$ وبجوار $1^-$

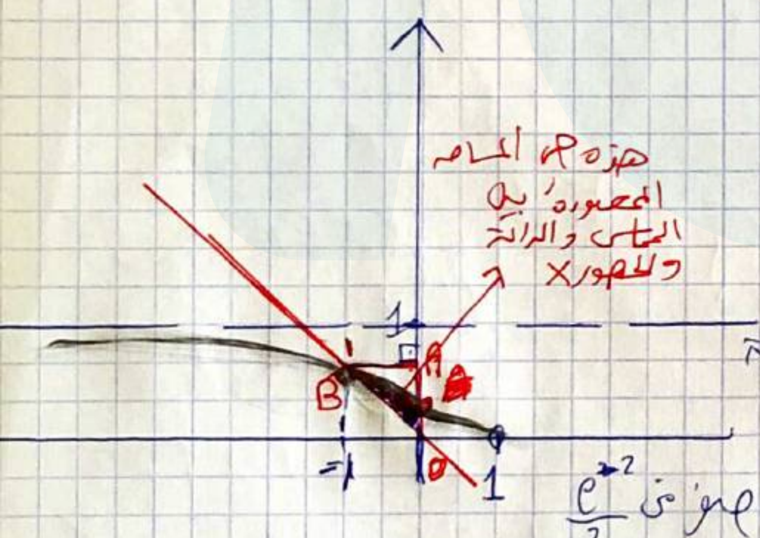
$$f(1^+)=e^{\frac{4}{1^+-1}}=e^{\frac{4}{0^+}}=+\infty \Longrightarrow x\to 1^+ \quad f(x)\to\infty$$

$$f(1^-)=e^{\frac{4}{1^--1}}=e^{\frac{4}{-0}}=e^{-\infty}=0^+ \Longrightarrow \underset{x\to 1^-}{f(x)}\to 0$$

وبالتالي عندما يقترب $x$ من $1^+$ فان $f(x)$ تقترب من $\infty$
وعندما تقترب الدالة من $1^-$ فان $f(x)$ تقترب من $0$ أي $(1,0)$ ثقب
$x=-1$ هي نقطة التواء $f(-1)=e^{\frac{4}{-1-1}}=e^{-2}$, اذا $(-1,e^{-2})$ التواء




٢.) المستقيم $y=k$
يقطع الرسم البياني لـ $f$ $y=1$
لكل $k$ يحقق $k>1$ او $0<k<1$




ه. مساحه المثلث $AOB$ هي $\frac{AO\cdot AB}{2}$

$AB=1 \quad AO=e^{-2}$

اذا $S_{AOB}=\frac{1\cdot e^{-2}}{2}$

والمساحه المحصورة بين الرسم للدالة والمماس والمحور $X$ هي أصغر من مساحة المثلث لذلك هي اصغر من $\frac{e^{-2}}{2}$

وهو المطلوب

حل سؤال 5 (11)

$$f'(x)=\frac{\ln(-x)+2}{x}$$

(أ.1) مجال تعريف الدالة هو $-x>0$ وأيضاً $x\neq 0$ (نفس مجال $f'$)

$x<0$ و $x\neq 0$

اذاً مجال تعريف الدالة $f$ وأيضاً $f'$ , $f''$ هو $\underline{x<0}$

(أ.2) $f'(x)=0 \longrightarrow \ln(-x)+2=0 \longrightarrow \ln(-x)=-2 \longrightarrow -x=e^{-2} \longrightarrow x=-e^{-2}$

اذا نقطة الشك التي تحقق $f'(x)=0$ هي $\boxed{x=-e^{-2} \text{ او } x=-\frac{1}{e^2}}$

نفحص اشارة المشتقة بجوار النقطة:

| $x$ | $x<-\frac{1}{e^2}$ <br> $x=-\frac{1}{e}$ | $-\frac{1}{e^2}$ | $-\frac{1}{e^2}<x<0$ <br> $x=-\frac{1}{e^3}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ↘ | | ↗ | |

$x=-\frac{1}{e^2}$ min

* مجالات تصاعد: $-\frac{1}{e^2}<x<0$

** مجالات تنازل: $x<-\frac{1}{e^2}$

(أ.3) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للدالة $f$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot(\ln(-x)+2)}{x^2}=\frac{1-\ln(-x)-2}{x^2}=\frac{-1-\ln(-x)}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-1-\ln(-x)}{x^2}} \longrightarrow f''(x)=0 \Longrightarrow \boxed{x=-\frac{1}{e}}$$

نفحص اشارة المشتقة الثانية في المجالات الملائمة

| $x$ | $x<-\frac{1}{e}$ <br> $x=-e$ | $-\frac{1}{e}$ | $-\frac{1}{e}<x<0$ <br> $x=-\frac{1}{e^2}$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ∩ تقعر للأسفل | التواء | ∪ تقعر للأعلى | |

مجالات التقعر للأعلى

$-\frac{1}{e}<x<0$

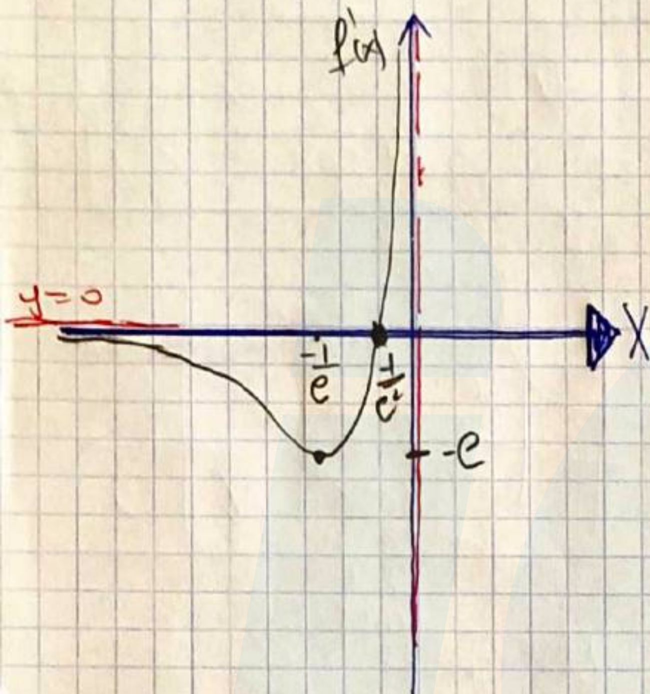
مجالات التقعر للأسفل

$x<-\frac{1}{e}$

مفهوم تقارب المشتقة 1.ب (12)

$$\lim_{x\to -\infty} f'(x) = \frac{\ln(+\infty)+2}{-\infty} \longrightarrow y=0$$ خط تقارب أفقي

خط تقارب عمودي $x=0$ (من جهة اليسار أي $0^-$)




2.ب) $\min(-\frac{1}{e},-e)$

تقاطع $x$ $(-\frac{1}{e^2},0)$

1.ج) معطى أن $f(-e^{-2})=0$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{\ln(-x)+2}{x}\,dx$$

$$= \int \left[\frac{\ln(-x)}{x} + \frac{2}{x}\right] dx$$

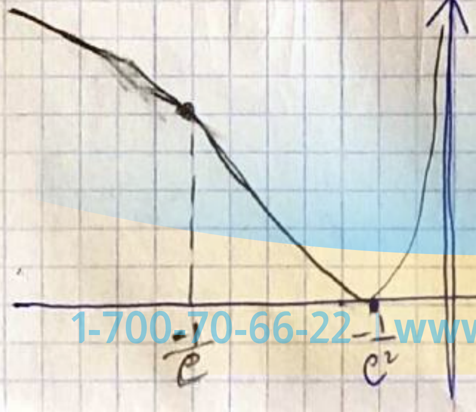
$$= \int \left[\frac{1}{x}\ln(-x) + \frac{2}{x}\right] dx = \frac{\ln(-x)^2}{2} + 2\ln|x| + c$$

* باستعمال تعريف الدالة $x<0$ لذلك نكتب $\ln|x|$ بدلاً من $-x$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(-x) + 2\ln(-x) + c$$

$$f(-e^{-2}) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 + c = c - 2 = 0 \Longrightarrow c = 2$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(-x) + 2\ln(-x) + 2 \text{ إذاً}}$$




2.ج) $X=0$ خط تقارب عمودي لـ $f(x)$

لا يوجد لـ $f(x)$ نقاط تقاطع

المحور $X$ غير نقطة الـ min $(-\frac{1}{e^2},0)$

نقطة التواء الدالة هي $(-\frac{1}{e},\frac{1}{2})$