حل نموذج بجروت

806-581

موعد شتاء 2020

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

ترتيب المعطيات في جدول

		سرعة	زمن	مسافة
حتى ان توقفت السيارة	سيارة	V_1	$\frac{15}{V_1}$	15
	شاحنة	V_2	$\frac{15}{V_2}$	15
فترة توقف السيارة	سيارة	0	0.5	0
	شاحنة	V_2	$\frac{30-3}{60}$ ($\frac{27}{60}$)	$\frac{27}{60}\cdot V_2$
بعد ان تابعت السيارة السير	سيارة	90	0.9 *	$96-15=81$
	شاحنة	V_2	$\frac{81-0.45V_2}{V_2}$	$81-0.45V_2$ **

حتى وصلت الشاحنة الى مكان توقف السيارة سارت 3 دقائق بعد توقف السيارة لذلك $\Leftarrow$

(I) $\frac{15}{V_1}+\frac{3}{60}=\frac{15}{V_2}$

زمن السيارة + $\frac{3}{60}$ د = زمن الشاحنة

اثناء توقف السيارة الشاحنة سارت 27 د

* بعد ان تابعت السيارة السير:-

سرعة السيارة 90 , والمسافة التي قطعتها حتى وصلت الى المدينة (ب) هي $96-15=81$ لذلك زمن السير في المقطع الاخير هو $\frac{81}{90}=0.9$ س

** مسافة الشاحنة بعد ان تابعت السيارة سيرها هي المسافة المتبقية لها بعد ان قطعت $15+\frac{27}{60}\cdot V_2$ اي:-

$$96-\frac{27}{60}V_2-15=81-0.45V_2$$

والزمن الذي سارته حتى وصلت الى المدينة (ب) هو:-

$$\frac{81-0.45V_2}{V_2}$$

بما ان الزمن الكلي للشاحنة والسيارة نفسه اذاً

(II) $\underbrace{\frac{15}{V_1}+\overbrace{0.5+0.9}^{1.4}}_{\text{زمن السيارة}}=\underbrace{\frac{96}{V_2}}_{\text{زمن الشاحنة}} \longrightarrow$ زمن الشاحنة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

اذاً حصلنا على معادلتين بمتغيرين:

تكمل الحل السابق

$$I \quad \frac{15}{V_1}+\frac{3}{60}=\frac{15}{V_2}$$

$$II \quad \frac{15}{V_1}+1.4=\frac{96}{V_2}$$

$$\frac{3}{60}-1.4=\frac{15}{V_2}-\frac{96}{V_2} \Rightarrow -1.35=\frac{81}{V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2=60} \xrightarrow[\text{ونحصل } V_1]{\text{نعوض}} \boxed{V_1=75}$$

اذاً سرعة السيارة 75 كم/س وسرعة الشاحنة 60 كم/س

البعد بين الشاحنة والسيارة ممكن ان يكون 3 كم في 3 حالات:

<u>حالة I</u>: بعد انطلاقهما تسبق السيارة الشاحنة وفي مرحلة معينة يكون البعد بينهم 3 كم

سيارة

(أ)

شاحنة

<u>ويتحقق</u>:

$$75t-60t=3$$

$$\Rightarrow 15t=3 \rightarrow t=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}\text{ س}$$

I اي بعد $\frac{1}{3}$ ساعة او 20 دقيقة منذ لحظة الانطلاق.

<u>حالة II</u>: بعد ان وصلت الشاحنة الى السيارة وهي متوقفة وتابعت السير حتى ابتعدت عنها لمسافة 3 كم اي عندما كانت الشاحنة على بعد 18 كم عن المدينة (أ) $[15+3=18]$

سرعة الشاحنة 60 كم/س لذلك الزمن $=\frac{18}{60}$ س او 18 دقيقة

II

<u>حالة III</u>: قبل وصولهما الى نقطة النهاية – المدينة (ب)

بعد ان استمرت السيارة بالسير بسرعة 90 كم/س والشاحنة بسرعة 60 كم/س وبما ان الشاحنة كانت قد ابتعدت عن السيارة ولكن منذ بدء السيارة التحرك ستقلص هذا البعد ويتحقق:

$$90T-60T=3 \rightarrow T=\frac{1}{10}\text{ س}$$

اي $\frac{1}{10}$ ساعة قبل وصولهم الى المدينة (ب) سيكون البعد بينهم 3 كم

$\frac{1}{10}$ س اي 6 دقائق قبل وصولهم

III

حل سؤال 2

1.أ

a_n متوالية حسابية / $a_k=p$ / $a_p=k$ $k<p$

(نطرح المعادلتين) $-\begin{cases} a_p = a_1+(p-1)d = k \\ a_k = a_1+(k-1)d = p \end{cases} \Longrightarrow [(p-1)-(k-1)]d = k-p$

$(p-k)d = k-p$

$\boxed{d = \frac{k-p}{p-k} = -1}$

2.أ

$a_p = a_1 + \overbrace{(p-1)(-1)}^{1-p} = k$

$\boxed{a_1 = k+p-1}$

1.ب

المتوالية الجديدة $C_n = a_n - n$

معطى أن $S_6^{a_n}=0$ مجموع أول 6 حدود في المتوالية C_n هو 0.

$S_6^{a_n}=0 \begin{cases} C_1 = a_1-1 \\ C_2 = a_2-2 \\ C_3 = a_3-3 \\ C_4 = a_4-4 \\ C_5 = a_5-5 \\ C_6 = a_6-6 \end{cases}$

مجموع أول 6 حدود a_n

$\boxed{S_6^{c_n}=0 = S_6^{a_n}-(1+\dots6)}$

$\Longrightarrow S_6^{a_n} - (1+2+3+4+5+6) = 0$

$\frac{6}{2}[2a_1+5d] - [\frac{6}{2}(1+6)] = 0$

$:3 / 3[2a_1-5] - 3(7) = 0 /:3$

$2a_1-5-7=0$

$2a_1 = 12 \rightarrow \boxed{a_1=6}$

الحد الأول في المتوالية a_n هو $\boxed{a_1=6}$

2.ب

بحسب البند (2.أ) وبند (1.ب) $a_1=6$ و $a_1=k+p-1$

إذاً: $6=k+p-1 \leftarrow 7=k+p$ و p,k اعداد صحيح موجبة (مستقيم)

لذلك وبما أن $k>p$ إذاً

k	p
6	1
5	2
4	3

ب) حسب تعريف المتوالية $C_n =$

$$\left\{\begin{array}{l} C_n = a_n - n \\ C_{n-1} = a_{n-1} - (n-1) \end{array}\right.$$ وبالتالي

$$C_n - C_{n-1} = a_n - n - \left(a_{n-1} - (n-1)\right)$$

$$C_n - C_{n-1} = a_n - \cancel{n} - a_{n-1} + \cancel{n} - 1$$

$$C_n - C_{n-1} = \underbrace{a_n - a_{n-1}}_{-1} - 1 = -2$$

اذا المتوالية C_n حسابية فرقها $\boxed{d_c = -2}$

بما ان $C_n - C_{n-1} = -2$ من هنا $C_{n-1} - C_n = 2$

وبالتالي:

$$(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + \dots + (c_{99} - c_{100})^2$$

$$2^2 + 2^2 + \dots + 2^2 =$$

$$4 + 4 + \dots + 4 = 50 \cdot 4 = \underline{200}$$

ملاحظة:

من الممكن ان نقول ان المتوالية a_n هي حسابية
والمتوالية $b_n = n$ هي أيضا حسابية وبالتالي

$$C_n = a_n - b_n = a_n - n$$

اي C_n عبارة عن متوالية حسابية لانها عبارة عن حاصل طرح متواليتين حسابيتين ... ومن ثم نحسب فرق المتوالية C_n ....

حل سؤال 3

(أ) بحسب المعطيات : يوجد في العلبة 12 كرة حمراء او زرقاء
عدد الكرات الزرقاء هو اكبر من عدد الكرات الحمراء
نفرض الزرقاء n اذاً الحمراء عددها $12-n$ $(n>6)$
وتتحقق :-

$$\underbrace{\frac{n}{12}\cdot\frac{12-n}{12}}_{\text{زرقاء حمراء}}+\underbrace{\frac{12-n}{12}\cdot\frac{n}{12}}_{\text{حمراء زرقاء}}=\frac{4}{9}$$

نضرب المعادلة بـ 144 ونحصل على :-

$$n(12-n)+(12-n)\cdot n=64$$

$$\rightarrow 2n(12-n)=64 \rightarrow n(12-n)=32$$

$$\rightarrow 12n-n^2=32 \Longrightarrow n^2-12n-32=0$$

نحل المعادلة التربيعية ونحصل على $\boxed{n_1=8}$ و $\boxed{n_2=4}$ غير ملائم $n>6$
اذاً يوجد 8 كرات زرقاء و 4 حمراء في العلبة

(ب) بعد ان اضافوا كرات صفراء الى العلبة لم يتغير احتمال اخراج كرتين بلون مختلف أي بقي $\frac{4}{9}$ وهذا معناه ان احتمال اخراج كرتين بنفس اللون هو $\frac{5}{9}=1-\frac{4}{9}$. نفرض اضفنا y صفراء
اي يتحقق :

$$\underbrace{\left(\frac{y}{12+y}\right)^2}_{\text{2 صفراء}}+\underbrace{\left(\frac{4}{12+y}\right)^2}_{\text{2 حمراء}}+\left(\frac{8}{12+y}\right)^2=\frac{4}{9}$$

نحل المعادلة ونحصل على $\cancel{y_1=0}$ و $\boxed{y_2=30}$ اي اضفنا 30 كرة صفراء.

(ج) اخرجوا الصفراء من العلبة وابقوا الحمراء والزرقاء .
الاحتمال ان تكون الكرة الحمراء الاولى التي نخرجها هي الرابعة على الأقل (اخرجنا 3 كرات على الاقل قبل الحمراء الاولى) معناه ان تكون الكرات الثلاث الاولى زرقاء أي :-

$$P\left(\text{اول 3 كرات زرقاء}\right)=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}=\frac{28}{110}=\frac{14}{55}$$

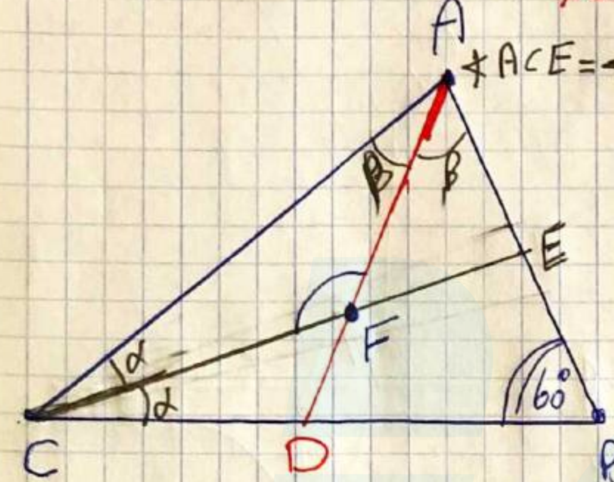
اي الاحتمال ان نخرج الكرة الحمراء الاولى بعد 3 كرات على الأقل هو $\boxed{\frac{14}{55}}$

حل سؤال 4

السؤال لا يعرض رسم توضيحي مرفق لنص السؤال لذلك سنرسم الرسم بحسب المعلومات

AD منصف $\measuredangle CAB$ // $\measuredangle CAD=\measuredangle DAB=\beta$

CE هو منصف $\measuredangle ACB$ // $\measuredangle ACE=\measuredangle ECB=\alpha$



P. خطوة: برهان أن الشكل الرباعي BDFE يمكن حصره داخل دائرة.

البرهان:

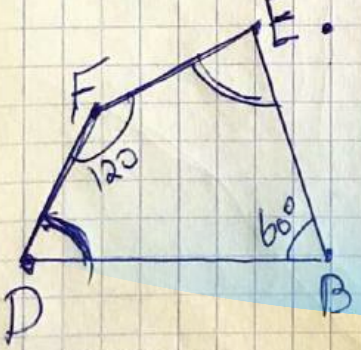
لكي نبرهن أن شكل رباعي يمكن حصره داخل دائرة يجب ان نبرهن أن حاصل جمع كل زاويتين متقابلتين بالشكل الرباعي هو $180°$.

1. $2\alpha+2\beta+60°=180°$ مجموع زوايا المثلث $180°$ (زوايا ABC $60°, 2\beta, 2\alpha$)
$\alpha+\beta=60°$

2. $\underbrace{\beta+\alpha}_{60°}+\measuredangle AFC=180°$ مثلث AFC مجموع زواياه $180°$
زوايا المثلث هي $\alpha,\beta, \measuredangle AFC$
و $\alpha+\beta=60°$
$\measuredangle AFC=180°-60°$
$\measuredangle AFC=120°$

3. $\measuredangle AFC=\measuredangle EFD=60°$ زوايا متقابلة بالرأس ومتساوية

4. نتج لدينا أنه في الشكل الرباعي EFDB يتحقق:
$\underbrace{\measuredangle EFD}_{120°}+\underbrace{\measuredangle B}_{60°}=180°$



وبما أن مجموع زوايا الشكل الرباعي هو $360°$ اذا مجموع الزاويتين الآخرتين بالشكل هو $180°$

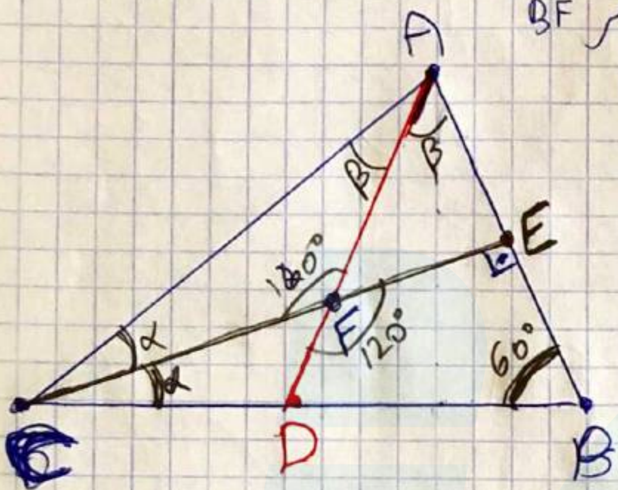
أي أن $\measuredangle FDB+\measuredangle FEB=180°$

وبالتالي الشكل الرباعي BDFE يمكن حصره داخل دائرة. وهو المطلوب

ب- مطلوب برهان ان المثلث ABC متساوي الاضلاع

معطى ان BF قطر بالدائرة التي تحصر الشكل الرباعي BDFE

البرهان (ب)



5- $\angle E=90°$ لانها محيطية مقابلة للقطر BF

6- في المثلث ECB مجموع الزوايا $180°$

اي $\angle E+\alpha+\angle B=180°$

$90°+\alpha+60°=180°$

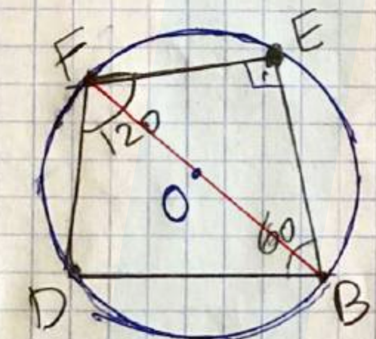
$\alpha=30°$

وبما ان $\alpha+\beta=60°$ (حسب 3)

اذا $\beta=30°$ ايضا

وعندها

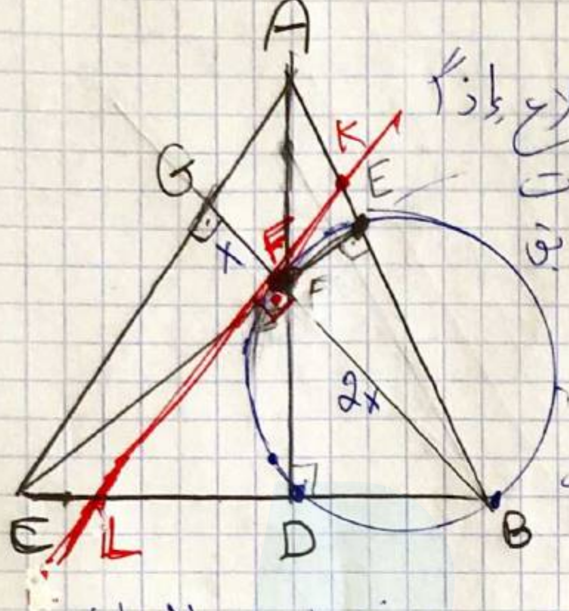
$2\beta=2\alpha=60°$



وينتج أن كل زوايا المثلث $60°$.

والمثلث متساوي الاضلاع

ج- معطى ان امتداد BF يقطع الضلع BC بالنقطة G.
بحسب هذا المعطى والنتائج من البند (أ) و(ب)
نستنتج ان :-



أ- بما ان المثلث متساوي الاضلاع اذاً
منصفات الزوايا والارتفاعات
والمتوسطات هي نفسها وتتطابق

ب- بما ان منصفات الزوايا
تلتقي بالنقطة F اذاً F
هي ايضاً نقطة التقاء المتوسطات
والارتفاعات.

ج- اطوال المتوسطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا
متساوية و F تقسم كل متوسط بنسبة 2:1 لصالح
جهة الرأس (بحسب نظرية نقطة التقاء المتوسطات)

مطلوب: برهان أن FG مساوٍ لنصف القطر

البرهان

7- بحسب (أ), (ب) و(ج) نفرض $FG=X$ اذاً $FB=2X$
8- FB هو قطر الدائرة اذاً FG مساوٍ لنصف قطر الدائرة.
(وهو المطلوب)

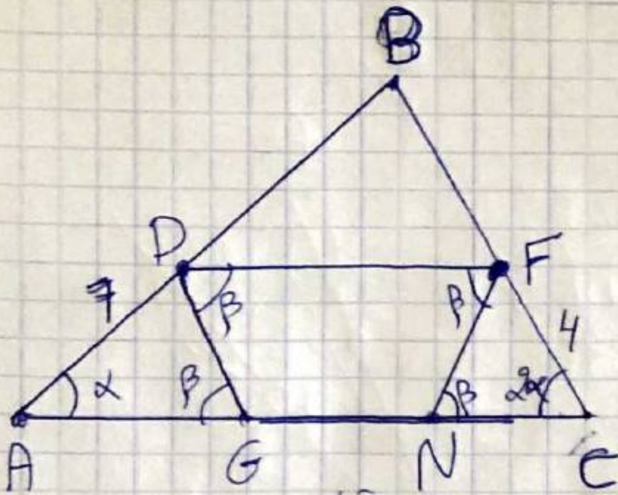
د- نرسم المماس للدائرة بالنقطة F (انظر الرسم)
ونعين التقاطع K و L.

مطلوب: حساب النسبة $\frac{KL}{AC}$

البرهان:

9- المماس عمودي على نصف القطر لذلك $\measuredangle BFL=\measuredangle KFB=90°$
10- $\measuredangle G=90°$ (حسب (أ), (ب), (ج))
11- $KL \parallel AC$ لان $\measuredangle KFB=\measuredangle G=90°$ وهي زوايا متناظرة
12- $\triangle KBL \sim \triangle ABC$ (ز.ز) ومن التشابه $\frac{KL}{AC}=\frac{BF}{BG}$
وهذه النسبة هي $\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$ (وهو المطلوب)

حل سؤال 5



(P.1) نضع المعطيات على الرسم

$\measuredangle FNC = \measuredangle NFD = \beta$ متبادلة بين متوازيين $DF \parallel GN$

$\measuredangle FDG = \beta = \measuredangle FNC$ زوايا القاعدة في شبه منحرف متساوي الساقين

$\measuredangle FDB = \measuredangle DGA = \beta$ متبادلة بين متوازيين.

في المثلث ADG يتحقق:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{DG}{\sin\alpha} = \frac{FN}{\sin\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{FN}{\sin\alpha} \quad (*)$$

وهو المطلوب (P)

(P.2) $\alpha = ?$, بما ان $\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{FN}{\sin\alpha}$ (نتيجة P.1)

$$\Longrightarrow \frac{7}{\sin\beta} = \frac{FN}{\sin\alpha} \quad (**) \Longrightarrow FN\cdot\sin\beta = 7\sin\alpha$$

في المثلث CFN يتحقق

$$\frac{FN}{\sin 2\alpha} = \frac{CF}{\sin\beta} = \frac{4}{\sin\beta} \Longrightarrow \frac{FN}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$$

$$\Longrightarrow FN\cdot\sin\beta = 4\cdot\sin 2\alpha$$

من $(**)$: $FN\sin\beta = 7\sin\alpha$

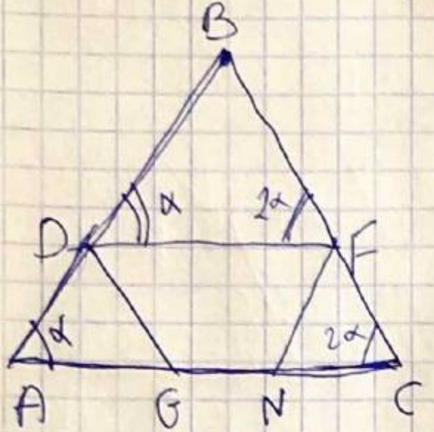
اذاً يتحقق: $\Longrightarrow 4\cdot\sin 2\alpha = 7\cdot\sin\alpha$

بحسب المتطابقة: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

نعوض ونحصل على $4\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 7\sin\alpha$ $(\sin\alpha \neq 0)$

$$8\cos\alpha = 7 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{7}{8} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 28.955^\circ}$$

نعطي أن مساحة المثلث BDF هي 56 سم , DF=?



$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDF = \alpha = 28.955^\circ$ بالتناظر

$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BFD = 2\alpha = 57.91^\circ$ بالتناظر

وبالتالي: $\sphericalangle B = 180^\circ - 57.91 - 28.955$

$\sphericalangle B = 93.135^\circ$

$$S_{\Delta BFD} = 56 = \frac{DF \cdot BF \cdot \sin 57.91^\circ}{2}$$

$$\longrightarrow 112 = DF \cdot BF \cdot \sin 57.91 \quad (***)$$

نستعمل قانون sin في المثلث BDF يتحقق:-

$$\frac{DF}{\sin 93.135^\circ} = \frac{BF}{\sin 28.955^\circ} \Longrightarrow BF = DF \cdot \frac{\sin 28.955^\circ}{\sin 93.135^\circ}$$

نعوض في $(***)$ بدل BF نحصل على

$$112 = DF \cdot DF \cdot \frac{\sin 28.955^\circ}{\sin 93.135^\circ} \cdot \sin 57.91^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$272.658 = DF^2$$

$$\boxed{16.51 = DF}$$

ب.

في المثلث ΔFCN: $\frac{NF}{\sin 2\alpha} = 2R$

في المثلث ΔDAG: $\frac{DG}{\sin\alpha} = 2r$

$$\frac{2R}{2r} = \frac{\frac{NF}{\sin 2\alpha}}{\frac{DG}{\sin\alpha}} \Longleftarrow$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{7}$$

$\boxed{DG = NF}$ (**) بحسب

سؤال 6

$$f(x)=\frac{6}{2\cos^2x-5\cos x-3} \qquad 0\le x\le 2\pi$$

1. مجال تعريف الدالة:

$$2\cos^2x-5\cos x-3\neq 0$$

نفرض $\cos x = t$

$$2t^2-5t-3=0 \qquad -1\le t\le 1$$

وهذه معادلة تربيعية

حلولها:

$t_1=\frac{1}{2}$ و $\cancel{t_2=3}$ غير ملائم

اذا مجال تعريف الدالة: $\cos x\neq\frac{1}{2}$

$x_1\neq\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $x_2\neq-\frac{2}{3}\pi+2\pi k$

$\boxed{x=\frac{2}{3}\pi}$, $x\neq-\frac{2}{3}\pi \leftarrow k=0$

$x=2\frac{2}{3}\pi$, $\boxed{x=\frac{4}{3}\pi} \leftarrow k=1$

اي انه في المجال $0\le x\le 2\pi$ الدالة غير معرفة في نقطتان ، $x\neq\frac{2}{3}\pi$ ، $x\neq\frac{4}{3}\pi$

ويمكن كتابة مجال التعريف كالتالي:

$$\boxed{0\le x<\frac{2}{3}\pi ,\ \frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi ,\ \frac{4}{3}\pi<x\le 2\pi}$$

2. $$f'(x)=\frac{0-6\cdot(-4\cos x\cdot\sin x+5\sin x)}{(2\cos^2x-5\cos x-3)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-6\sin x(-4\cos x+5)}{2\cos^2x-5\cos x-3}} \rightarrow f'(x)=0$$

$\rightarrow -6\sin x=0$ أو $-4\cos x+5=0$

$\sin x=0$, $\cos x=\frac{5}{4}$ لا يوجد حل X

$x=\pi k \rightarrow \boxed{x=0,\pi,2\pi}$

نصنف النقاط بواسطة جدول ونحصل على:

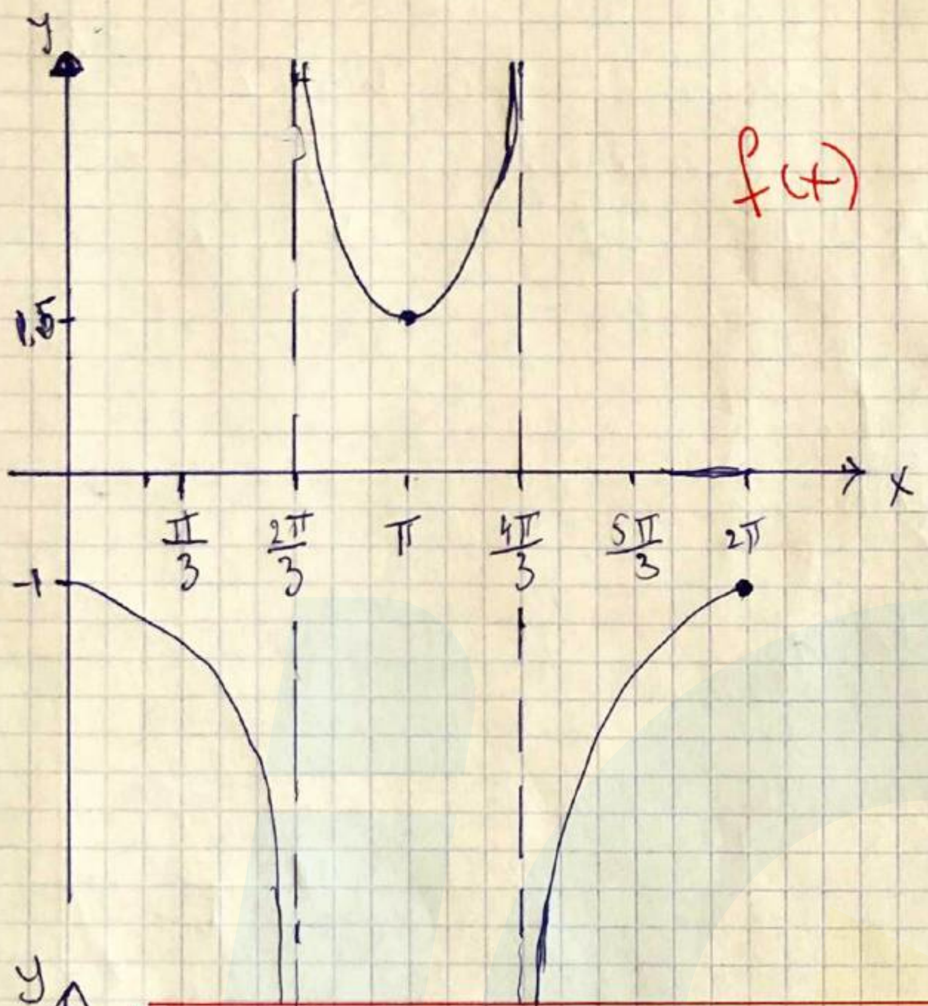
x	0	$\longleftrightarrow$	$\frac{2}{3}\pi$	$\longleftrightarrow$	π	$\longleftrightarrow$	$\frac{4}{3}\pi$	$\longleftrightarrow$	2π
f'	0	$-$	//	$-$	0	$+$	//	$+$	0
f	-1	$\searrow$	//	$\searrow$		$\nearrow$	//	$\nearrow$	-1
	3p max				min				max 3p

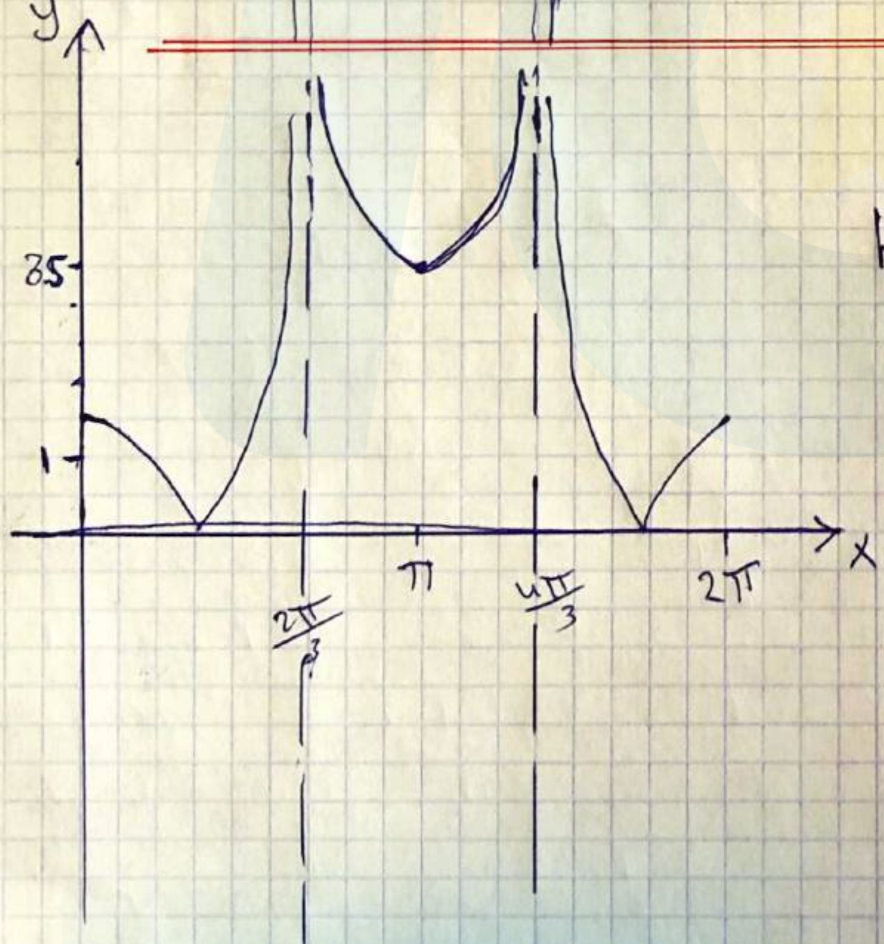
$(0,-1)$ max 3p

$(\pi,1.5)$ min

$(2\pi,-1)$ max 3p

(12)





ب.1

$h(x) = |f(x)+2|$

ب.2

$0 < K \leq 1$ أو $K > 3.5$

ج.

$g(x) = |f(x)| + 2$ // $h(x) = |f(x)+2|$ الادعاء خطأ

لأن القيمة المطلقة تؤثر على المجال السالب للدالة وتصبح مجال موجب للدالة اما في المجال الموجب ل $f(x)$ فان الدالتين h و g متساويتين

حل سؤال 7

$f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$ مجال تعريف الدالة $x\neq\pm\frac{1}{2}$

أ.1) $f'(x)=\frac{3(4x^2-1)-3x\cdot 8x}{(x^2-1)^2}=\dots=\frac{-12x^2-3}{(4x^2-1)^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-12x^2-3}{(4x^2-1)^2}}$$

بسط المشتقة بالضرورة $-12x^2-3$ سالب لكل x في مجال التعريف
مقام المشتقة موجب لكل x في مجال التعريف
اذاً $f'(x)<0$ لكل x في مجال التعريف والدالة
تنازلية في كل مجال تعريفها: $x>\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$

أ.2) سنحدد المجالات الموجبة والسالبة للدالة حسب طريقة الأفعى

x	$x<-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<0$	0	$0<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
$f(x)$	$f(-1)<0$ −		$f(-\frac{1}{4})>0$ +	0	$f(\frac{1}{4})<0$ −		$f(1)>0$ +

لذلك: مجالات موجبة: $x>\frac{1}{2}$ او $-\frac{1}{2}<x<0$
مجالات سالبة: $0<x<\frac{1}{2}$ أو $x<-\frac{1}{2}$

ب.1) $g(x)=\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$ ⇐ $g(x)=\sqrt{f(x)}$
اي ان مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو المجال غير السالب لـ $f(x)$
اي $-\frac{1}{2}<x\leq 0$ او $x>\frac{1}{2}$

ب.2) في $x=\pm\frac{1}{2}$ الدالة $f(x)$ غير معرفة ولا تساوي $\frac{0}{0}$
لذلك $\boxed{x=\frac{1}{2}}$, $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ خطوط تقارب عمودية
للدالة $g(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\overbrace{\sqrt{f(x)}}^{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{3}{4x}}\to\sqrt{0}\Rightarrow\boxed{y=0}$$

خط تقارب افقي

ملاحظات:

الدالة $g(x)$ في المجال $-\frac{1}{2} < x \le 0$

تنتقل من مقعرة للاعلى

الى مقعرة للاسفل للزيادة

بجوار $x = -\frac{1}{2}$ تقترب من ∞

و $g(0) = 0$ اي هنالك نقطه

في المجال $-\frac{1}{2} < x \le 0$ هي نقطه

التواء تنتقل بها من مقعرة للاعلى

الى مقعرة للاسفل.

نقطه التواء الدالة $g(x)$ هي

نقطه قصوى للمشتقه وبما ان

الدالة $g(x)$ تنازلية اذاً

الدالة $g'(x)$ سالبة في

كل مجال.

عندما تقترب x من $\infty+$

تقترب الدالة $g(x)$ من 0 اي ميلها

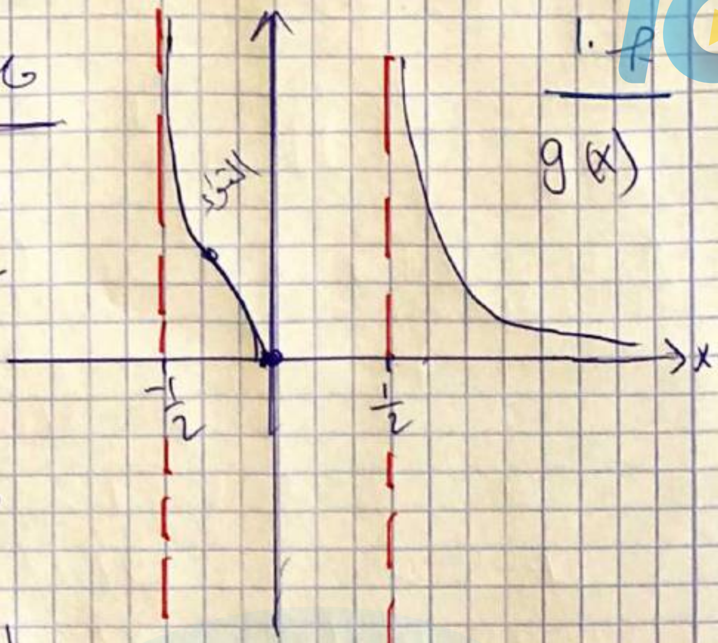
يصبح عدد صغير جداً وتقترب

من الصفر لذلك $g'(x)$ تقترب

من 0 عندما $x \to \infty$

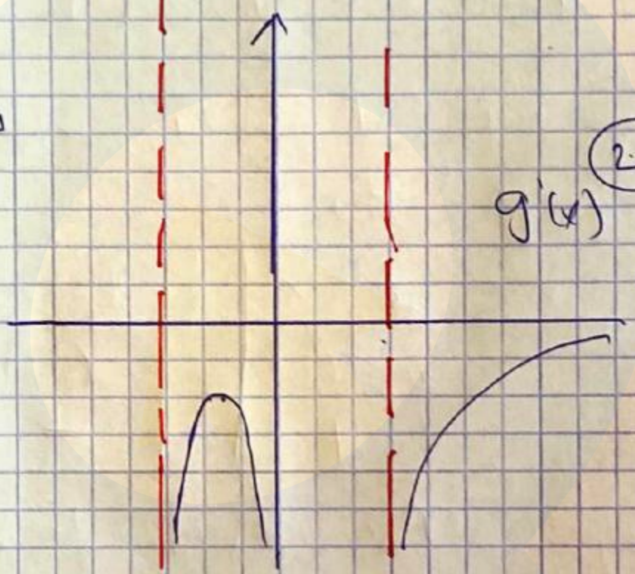
1. א

$g(x)$



2. א

$g'(x)$

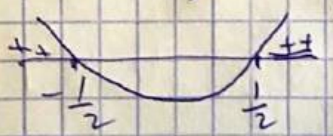


ב) $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$ مجال تعريف الدالة $h(x)$ هو المجال

الذي يحقق الشرطين التاليين

$3x \ge 0$ ، ايضا $4x^2-1 > 0$

$x \ge 0$ وايضا



$x > \frac{1}{2}$ او $x < -\frac{1}{2}$

ودمج الشرطين معًا هو $x > \frac{1}{2}$

اي مجال تعريف الدالة $h(x)$ هو $\boxed{x > \frac{1}{2}}$

حل سؤال 8

$$f(x) = -x^2+1$$

أ. معادلة المماس في $x=t$ هي من الصورة

$$l: y = mx+n$$

$m = f'(t)$ ، ونقطة التماس هي:

$$\Big(t, \underbrace{-t^2+1}_{f(t)}\Big)$$

نجد $f'(x)$:

$$f'(x) = -2x \longrightarrow f'(t) = -2t$$

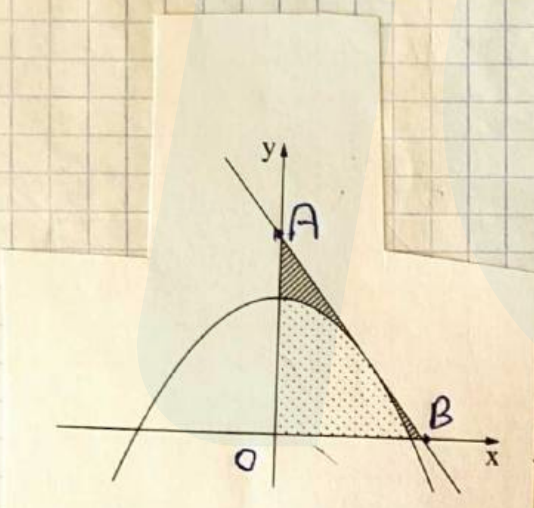
نعوض في صورة معادلة المماس لنجد n

$$y = mx+n \xrightarrow{\text{نعوض}} -t^2+1 = -2t\cdot t + n$$

$$-t^2+1 = -2t^2+n \Longrightarrow n = t^2+1$$

ومعادلة المماس هي:

$$\boxed{l: y = -2tx + t^2+1}$$



ب. المساحة المخططة عبارة عن المساحة المحصورة بين المستقيم والمحور y والمحور x ناقص المساحة المحصورة بين البرابولا (القطع المكافئ) والمحور y والمحور x أي هي عبارة عن مساحة المثلث OAB ناقص المساحة المنقطة.

وبما أن المساحة المنقطة ثابتة لذلك هذه المساحة ستكون أصغر ما يمكن عندما تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن..

نجد النقاط A و B (التقاطع مع المحاور) من خلال معادلة المستقيم

احداثيات A هي: $(0, t^2+1)$ واحداثيات $B: \left(\frac{t^2+1}{2t}, 0\right)$

اذا: $OB = \frac{t^2+1}{2t}$ و $AO = t^2+1$ ومساحة المثلث هي: $S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot OA \cdot OB$

$$S_{OAB} = S(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)\cdot\frac{t^2+1}{2t} = \frac{(t^2+1)^2}{4t} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(t^2+1)^2}{t}$$

$$S'(t) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2(t^2+1)\cdot 2t\cdot t - (t^2+1)^2}{t^2} = \frac{(t^2+1)(4t^2-(t^2+1))}{4t^2} = \frac{(t^2+1)(3t^2-1)}{4t^2}$$

$S'(t) = \frac{(t^2+1)(3t^2-1)}{4t^2} \overset{?}{=} 0 \qquad t>0$ اذاً:

$\Rightarrow (t^2+1)(3t^2-1)=0$

$(t^2+1)=0$ X دائماً موجب لا يساوي صفر

$3t^2-1=0 \Rightarrow 3t^2=1 \Rightarrow t^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{1}{3}}}$

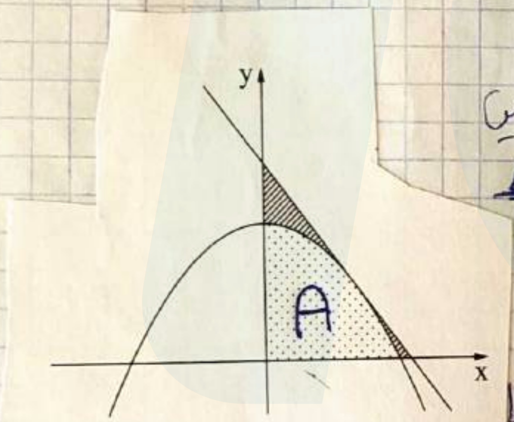
أو $\boxed{t=\frac{1}{\sqrt{3}}}$

نتأكد من انه لـ $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ سنحصل على اصغر مساحة

اي ان هذه النقطة هي min ← نفحص جدول

t	0	$0<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$t>\frac{1}{\sqrt{3}}$
S'		$-$	0	$+$
S		$\searrow$	min	$\nearrow$

اذاً عندما يكون $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ نحصل على اصغر مساحة مخططة.



ج. i

A هي المساحة بين الدالة $f(x)$ والمحورين

وهذه المساحة ثابتة ولذلك التعبير $\frac{A}{S}$

تتغير قيمته عندما يتغير S.

واكبر قيمة للتعبير $\frac{A}{S}$ (وهو عبارة عن

كسر موجب) ستكون اكبر ما يمكن عندما

يكون S اصغر ما يمكن وحسب (أ) S يحصل على min في $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ج. ii S لا يحصل على max حسب (ب) ولذلك لا يوجد للتعبير

$\frac{A}{S}$ قيمة اصغر ما يمكن

اذاً الادعاء (i) صحيح

الادعاء (ii) خطأ