حل نموذج بجروت

382

موعد شتاء 2020

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل امتحان موعد شتاء 2020
نموذج 382 (803)

حل سؤال 1 :

نفترض أن سعر الفلافل للوجبة هو x شيكل (في يوم الأحد)
ونفترض ان سعر زجاجة المشروب هو y شيكل (في يوم الاحد)
أمس اشترى وجبة فلافل وزجاجة مشروب ودفع 27 شيكل
لذلك المعادلة الملائمة هي:-

$$\mathrm{I} \quad \boxed{x+y=27}$$

يوم الاثنين كانت وجبة الفلافل تباع بتخفيض 25% اي أنها كانت تباع بـ 75% من ثمنها يوم الأحد اي ثمن الوجبة ~~75%~~ x $(0.75x)$
وثمن المشروب لم يتغير.
اشترى امير يوم الاثنين 3 وجبات فلافل وزجاجة مشروب
ثمن الوجبات الثلاث دفع $\underbrace{3\cdot 0.75x}_{2.25x}$ وثمن زجاجة المشروب y
وبالمجموع دفع 49.5 شيكل
اي تتحقق:-

$$\mathrm{II} \quad \boxed{2.25x+y=49.5}$$

وبهذا حصلنا على معادلتين بمتغيرين:-

نطرح المعادلتين

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & x+y=27 \\ - \;\mathrm{II} & 2.25x+y=49.5 \\ \hline & x-2.25x=27-49.5 \end{array}$$

$$-1.25x=-22.5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-22.5}{-1.25}=18}$$

اذاً سعر وجبة الفلافل قبل التخفيض (في يوم الاحد) هو 18 شيكل

نعوض ونجد y: من المعادلة الاولى:-

$$x+y=27$$

$$x=18 \rightarrow 18+y=27 \longrightarrow y=27-18=9$$

$$\boxed{y=9}$$

اذا سعر وجبة الفلافل قبل التخفيض 18 شيكل وسعر زجاجة المشروب 9

ب. يوم الاحد

دفعت دالية: $162 = 18 \cdot 9$ شيكل مقابل 9 وجبات الفلافل

$\underline{81} = 9 \cdot 9$ شيكل مقابل 9 زجاجات مشروب

وبالمجموع 243 شيكل

اذاً يوم الاحد دفعت دالية مبلغ 243 شيكل مقابل 9 وجبات فلافل و 9 زجاجات مشروب

يوم الاثنين (كان تخفيض 25% على وجبة الفلافل وثمن الوجبة هو $0.75x$).

ثمن وجبة الفلافل كان $0.75 \cdot 18 = 13.5$ شيكل

دفعت دالية:

مقابل 9 وجبات فلافل $= 13.5 \cdot 9 = 121.5$ شيكل

ومقابل 9 زجاجات مشروب 81 شيكل (نفس المبلغ من يوم الاحد)

وبالمجموع دفعت:

$$81 + 121.5 = 202.5$$

شيكل

التخفيض الذي حصلت عليه يوم الاثنين كان بمبلغ:

$$243 - 202.5 = 40.5$$

شيكل

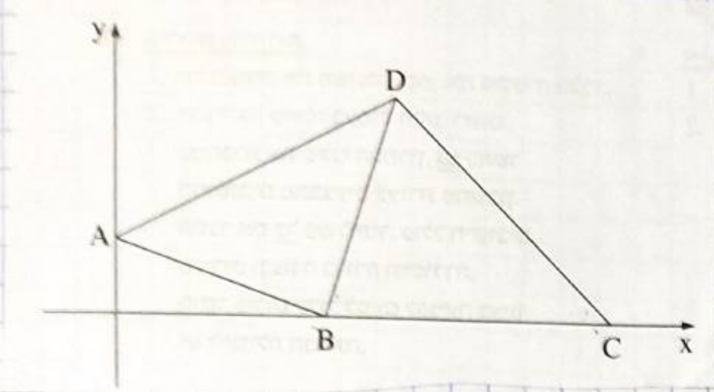
وبالتالي المبلغ الذي دفعته كان اقل ب 40.5 شيكل

ونسبة المئوية اقل ب $\frac{40.5}{243} \cdot 100\% \longrightarrow 16.66\%$

اي اقل ب 16.66%

حل سؤال 2

أ. لحسب المعطيات:



$BD: y=3x-18$

$DC: y=-x+14$

B هي تقاطع BD مع المحور x
نعوض $y=0$ في معادلة BD.

$\to 0=3x-18 \longrightarrow -3x=-18 \longrightarrow x=\frac{-18}{-3}=6$

اذاً $\boxed{B:(6,0)}$

C هي تقاطع DC مع المحور x، نعوض $y=0$ في معادلة DC
ونجد احداثيات C.

$\to 0=-x+14 \longrightarrow \boxed{x=14}$

اذاً $\boxed{C:(14,0)}$

ب. D هي تقاطع المستقيمين:

(نطرح المعادلتين)

$$\begin{array}{r} y=3x-18 \\ -\quad y=-x+14 \\ \hline 0=3x-(-x)-18-14 \end{array} \Longrightarrow 0=3x+x-32$$

$\Longrightarrow 0=4x-32 \Longrightarrow 32=4x \Longrightarrow \frac{32}{4}=x \Longrightarrow \boxed{8=x}$

نجد y: نعوض في $y=-x+14$ $(x=8)$

$\to y=-8+14=6$

$\boxed{D:(8,6) \text{ اذاً}}$

ج. $A(0,2)$

لكي نبرهن ان AB يعامد BD يجب ان نبرهن ان حاصل ضرب
ميل AB وميل BD هو -1 اي $(\text{ميل } AB)\cdot(\text{ميل } BD)=-1$

$A(0,2) \quad B:(6,0) \Longleftarrow \text{ميل } AB=\frac{2-0}{0-6}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$

ميل CD هو 3 $\Longleftarrow (\text{ميل } AB)\cdot(\text{ميل } CD)=-1$

$-1 = 3 \cdot -\frac{1}{3}$ (وهو المطلوب)

(د.1) مساحة المثلث هي: $S_{ABD}=\frac{AB\cdot BD}{2}$

بما ان AB يعامد BD اي ان الزاوية ABD = 90°

بالتالي المثلث قائم الزاوية ومساحته هي $\frac{AB\cdot BD}{2}$

نجد اطوال AB و BD

B:(6,0)
D:(8,6)

$BD=\sqrt{(8-6)^2-(0-6)^2}=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$

$\boxed{BD=\sqrt{40}}$

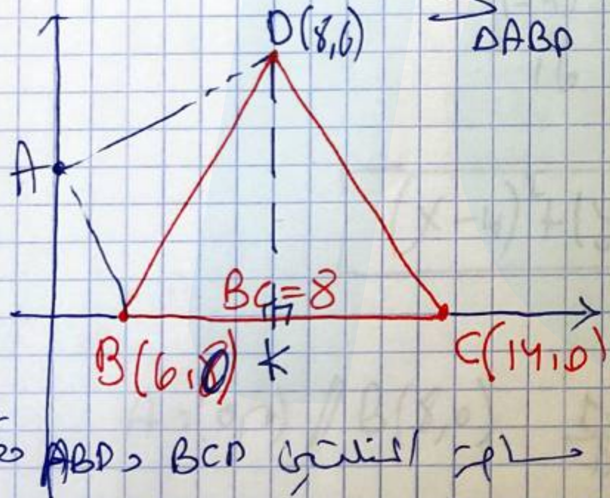
نجد طول AB

$AB: \sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$

A(0,2)
B(6,0)

اذاً $\boxed{AB=\sqrt{40}}$

$S_{\Delta ABD}=\frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{40}}{2}=\frac{40}{2}=20$ وحدة مساحة



(د.2) $BC=14-6=8$

$BK=6$ الارتفاع

$S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}$

مساحة الشكل الرباعي عبارة عن مساحة المثلثين BCD و ABD معاً

مساحة ABD هي 20 وحدة، بقي ان نجد مساحة BCD

مساحة $BCD=\frac{BK\cdot BC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{48}{2}=24$

اذاً مساحة الشكل الرباعي $ABCD=20+24=44$ وحدة مساحة

$\boxed{\text{مساحة } ABCD = 44 \text{ وحدة مساحة}}$

سؤال 3

(أ) M هي مركز الدائرة و AB هو قطر لذلك M هي منتصف AB
ونستعمل قانون منتصف قطعة :-

$A:(0,2)$ $x_m = \frac{x_A+x_B}{2}$ $y_m = \frac{y_A+y_B}{2}$

$B:(8,0)$ $x_m = \frac{0+8}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $y_m = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$

إذاً $M:(4,1)$

(2.1) معادلة الدائرة هي بين الصورة :-
$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$
نعوض النقطة A و M في معادلة الدائرة ومن ثم نجد R^2

$$(0-4)^2+(2-1)^2=R^2$$
$$(-4)^2+(1)^2=R^2$$
$$16+1=R^2$$

اذاً : $\boxed{R^2=17}$

$\boxed{\text{ومعادلة الدائرة : } (x-4)^2+(y-1)^2=17}$

(ب) ميل AB

$A:(0,2)$ // $B(8,0)$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{0-8} = \frac{2}{-8} = \frac{-1}{4}$

$\boxed{\text{ميل } AB = \frac{-1}{4}}$

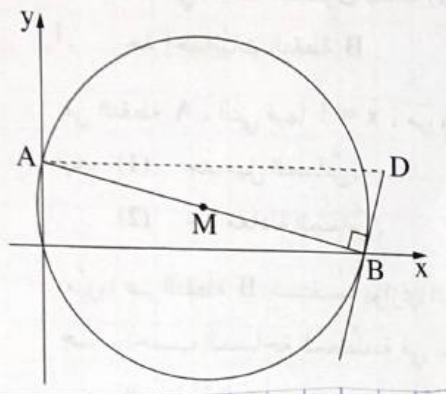
جـ- المماس عمودي على نصف القطر ولذلك : $\frac{-1}{\text{ميل } AB}$ = ميل المماس

أي : $\frac{-1}{\frac{-1}{4}} = 4$ = ميل المماس

المماس يمر بـ $B:(8,0)$ وميله 4 نعوض في الصورة العامة
لمعادلة مستقيم ونجد n : $y=mx+n$

$0=4\cdot8+n \longrightarrow 0=32+n \longrightarrow \boxed{-32=n}$

$\boxed{\text{اذاً معادلة المماس هي } y=4x-32}$



(1.د) بما ان AD يوازي المحور X

اذاً للنقطة A و D يوجد نفس

الاحداثي y . $A:(0,2)$ لذلك $D(x_D,2)$

النقطة D تقع على المماس BD ولذلك

تحقق معادلته

$$BD: y=4x-32$$

نعوض $y=2$ بالمعادلة ونجد X

$$2=4x_D-32 \Rightarrow 2+32=4x_D \Rightarrow 34=x_D \Rightarrow \frac{34}{4}=x_D$$

$$\boxed{8.5=x_D}$$

$$\boxed{\text{اذاً } D:(8.5,2)}$$

(2.د) محيط المثلث $ABD = BD+AB+AD$

$AB=2R$. من معادلة الدائرة $R^2=17$ لذلك $R=\sqrt{17}$

وبالتالي $2\sqrt{17}=2R \Rightarrow \boxed{AB=2\sqrt{17}}$

نجد طول AD

بما ان AD موازي للمحور X اذاً طوله هو

$$AD=x_D-x_A=8.5-0=8.5$$

نجد طول BD

$$BD=\sqrt{(8.5-8)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(0.5)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\sqrt{4.25}$$

$B:(8,0)$

$B:(8.5,2)$

$$\boxed{BD=\sqrt{4.25}}$$

اذاً محيط المثلث هو:

$$AD+AB+BD=8.5+\underbrace{2\sqrt{17}}_{8.246}+\underbrace{\sqrt{4.25}}_{2.061}=18.807$$

$$\boxed{\text{اذاً محيط المثلث } ABD \text{ هو } 18.807}$$

حل سؤال 4

$$f(x) = 0.25x + \frac{9}{x}$$

أ) مجال تعريف الدالة هو $x \neq 0$

ب) $f'(x) = 0.25 + 9\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 0.25 + \frac{-9}{x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 0.25 + \frac{-9}{x^2} = 0 \Longrightarrow 0.25 = \frac{9}{x^2}$$

$$\xrightarrow{\cdot(x^2)} 0.25x^2 = 9 \Longrightarrow x^2 = \frac{9}{0.25} = x^2 = 36$$

$$\Longrightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \boxed{x_1 = 6}, \ \boxed{x_2 = -6}$$

اذا هنالك نقطتين قصوتين، نلخصهم بواسطة جدول :-

x	$x=-10$ $x<-6$	$x=-6$	$-6<x<0$ $x=-1$	0	$x=1$ $0<x<6$	$x=6$	$x=10$ $6<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max	↘	///	↘	min	↗

نفحص اشارة المشتقة في المجالات قبل وبعد النقاط القصوية للمشتقة

$$f'(-10) = 0.25 - \frac{9}{(-10)^2} = 0.25 - \frac{9}{100} = 0.16 > 0$$

$$f'(-1) = 0.25 - \frac{9}{(-1)^2} = 0.25 - \frac{9}{1} = -8.75 < 0$$

$$f'(1) = 0.25 - \frac{9}{(1)^2} = 0.25 - 9 = -8.75 < 0$$

$$f'(10) = 0.25 - \frac{9}{(10)^2} = 0.25 - \frac{9}{100} = 0.16 > 0$$

$x = 6$ min

$\Longrightarrow x = -6$ max

تعليل :

$$f(6) = \underbrace{0.25\cdot 6}_{1.5} + \overbrace{\frac{9}{6}}^{1.5} = 3 \qquad (6,3) \text{ min}$$

$$f(-6) = 0.25(-6) + \frac{9}{-6} = -3 \qquad (-6,-3) \text{ max}$$

ج) بحسب الجدول الذي صنفنا بحسبه النقاط فإن المجالات التصاعدية للدالة هي:

$$\boxed{x<-6 \text{ أو } x>6}$$

د) الدالة غير معرفة في $x=0$ لذلك مع المحور y لن يكون هنالك نقطة تقاطع (تذكر انه في نقطة تقاطع الدالة مع المحور y فإن $x=0$)

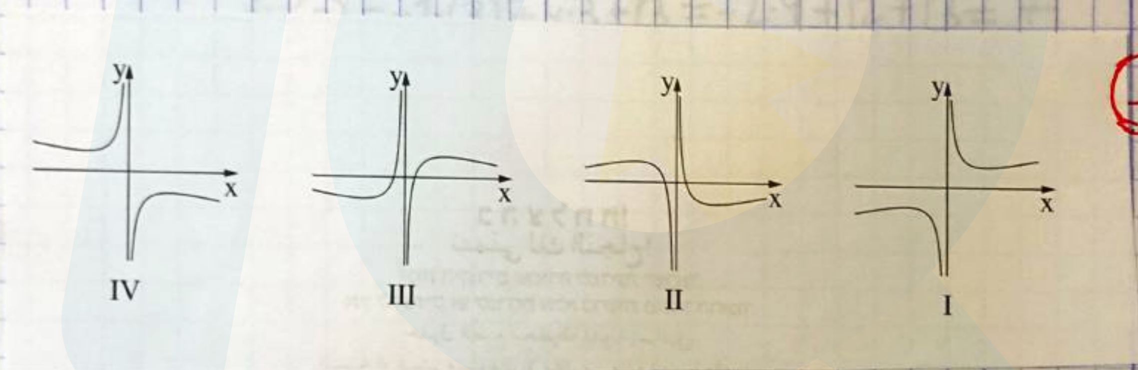
مع المحور x نعوض $y=0$

$$f(x)=0.25x+\frac{9}{x}=0$$

نضرب بـ x $\Longrightarrow 0.25x^2+9=0 \Longrightarrow 0.25x^2=-9$

$\Longrightarrow x^2=\boxed{\frac{-9}{0.25}}$ عدد سالب $\Longrightarrow$ x^2 هو دائماً عدد موجب ولا يمكن ان يساوي عدد سالب $\Leftarrow$ لا يوجد تقاطع مع x.

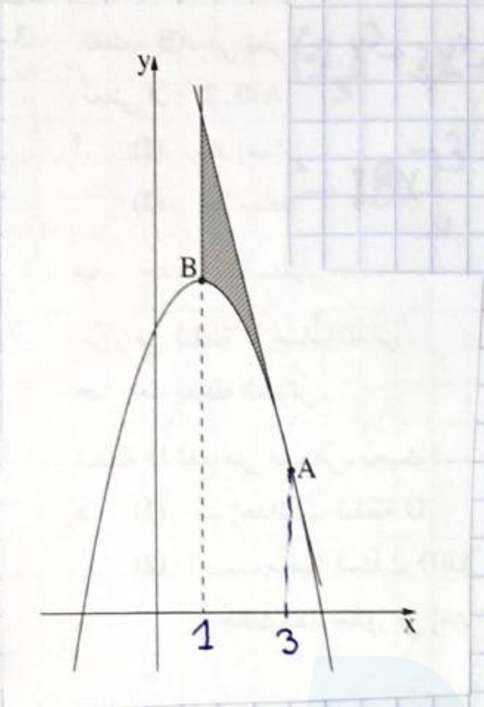
هـ)



بحسب نتائج البنود السابقة:

* للدالة $f(x)$ لا يوجد تقاطع مع المحاور لذلك الرسمين II و III غير ممكنين.
* بحسب المجالات التصاعدية للدالة $x>6$ او $x<-6$ نستنتج ان الرسم I هو الملائم والذي يفي بمعطيات الدالة. لانه يعرض مجالات تصاعدية ملائمة ولا يوجد له تقاطع مع المحاور.

$\boxed{\text{الرسم الملائم هو I}}$



حل سؤال 5

أ) النقطة القصوى تحقق $f'(x)=0$

$$f(x)=-2x^2+4x+13$$

$$f'(x)=-4x+4=0 \Longrightarrow 4=4x$$

$$\boxed{1=x} \Longleftarrow \frac{4}{4}=x$$

نعوّض:

$$f(1)=-2\cdot(1)^2+4\cdot 1+13=$$

$$f(1)=-2+4+13=15$$

اذاً النقطة $B:(1,15)$ هي مقصوى للدالة $f(x)$.

ب) النقطة $A(3,y_A)$ تقع على الدالة، نجد y_A بواسطة التعويض بالدالة

$$f(3)=-2\cdot(3)^2+4\cdot 3+13=\overbrace{-2\cdot 9}^{-18}+12+13=7$$

اذاً: $A(3,7)$

معادلة المماس من الصورة $y=mx+n$

m هو ميل المماس وهو يساوي مشتقة الدالة في $x=3$

$$f'(x)=-4x+4 \Longrightarrow m=f'(3)=\overbrace{-4\cdot 3}^{-12}+4=-8$$

$\boxed{\text{اذاً } m=-8}$

والآن اصبح معنا ميل المماس $m=-8$ ونقطة $A(3,7)$ التي يمر فيها
لذلك يمكننا ايجاد n وكتابة معادلته:

$m=-8$
$A(3,7)$

$$y=mx+n$$

$$7=-8\cdot 3+n \Longrightarrow 7=-24+n \Longrightarrow \overbrace{7+24}^{31}=n$$

$\boxed{y=-8x+31 \quad \text{ومعادلة المماس}}$ $\boxed{31=n}$

ج) المساحة المحصورة بين المماس والدالة من $x=1$ وحتى $x=3$ هي المساحة المخططة. وهي عبارة عن:

$$\int_1^3 (-8x+31)-(-2x^2+4x+13)\,dx=\left[\left(-\frac{8x^2}{2}+31x\right)-\left(-\frac{2\cdot x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+13x\right)\right]_1^3$$

$$\left[-4x^2+31x-\left(\frac{-2x^3}{3}+2x^2+13x\right)\right]_1^3 = \left[-4x^2+31x+\frac{2}{3}x^3-2x^2-13x\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{+2x^3}{3}-6x^2+18x\right]_1^3 = \left[\frac{+2\cdot 3^3}{3}-6\cdot 3^2+18\cdot 3\right]-\left[\frac{+2\cdot 1^3}{3}-6\cdot (1)^2+18\cdot 1\right]$$

$$=\left[\frac{+54}{3}-6\cdot 9+54\right]-\left[\frac{2}{3}-6+18\right] = \left[\overbrace{18\cancel{-54+54}}^{18}\right]-\left[12\tfrac{2}{3}\right] = 5\tfrac{1}{3}$$

$\boxed{\text{المساحة} = 5/3 \text{ وحدة مساحة}}$

حل سؤال 6

أ- مجموع العددين هو $f(x)=\sqrt{x}-x$

اي ان الدالة $f(x)$ تعبر عن مجموع العددين $\sqrt{x}$ و $-x$.

لكي نجد اكبر مجموع ممكن نجد متى يتحقق $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}=1 \Rightarrow 1=2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\sqrt{x} \xRightarrow{\text{نربع الطرفين}} \left(\frac{1}{2}\right)^2=x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}=x}$$

نفحص جوار للنقطة $x=\frac{1}{4}$ بواسطة جدول لكي نبرهن انها מקסימום.

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	1
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$x=\frac{1}{4}$	$\searrow$

$$f'\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{5}}}-1=0.11 \Rightarrow +$$

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow -$$

ب- لكي نجد اكبر مجموع ممكن نعوض $x=\frac{1}{4}$ بالدالة

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

اذاً اكبر مجموع ممكن هو $\frac{1}{4}$