حل نموذج بجروت

(806)-581

موعد شتاء 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

بحسب معطيات السؤال نفهم :-

4 انابيب قدراتهم متساويه - نفرض قدرة الواحد X

الأنابيب الأربعة تملأ بركتين - الاولى حجمها V_1 والثانيه V_2

نبني جدول يصف من مراحل تعبئة البركتين.

	قدرة	زمن	عمل	ملاحظات
بركة (أ)	4X	$\frac{V_1}{6} : 4X = \boxed{\frac{V_1}{24X}}$	$\frac{1}{6}V_1$	4 انابيب تملأ البركه (أ) حتى $\frac{1}{6}$ حجمها ⟸ العمل $\frac{1}{6}V_1$
بركة (أ)	3X	$\frac{1}{3}V_1 : 3X = \boxed{\frac{V_1}{9X}}$ ⇓	$\frac{1}{3}V_1$	نقلنا انبوب من بركة (أ) الى (ب) وبقي 3 انابيب تملأ بركة (أ) حتى $\frac{1}{2}$ حجمها اي العمل هو $\frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{6}V_1 \Leftarrow \frac{1}{3}V_1$. الزمن لبركة (أ) و(ب) متساوي.
بركة (ب)	X	$\frac{V_1}{9X}$	$\frac{V_1}{9}$	
بركة (أ)	X	$\frac{V_1}{2X}$ ⇓	$\frac{1}{2}V_1$	بعد ان امتلأت $\frac{1}{2}$ بركة (أ) نقلوا انبوبين اضافيين للبركة (ب) واستمروا هكذا حتى امتلأت البركتان. اي عملنا العمل هو $\frac{1}{2}V_1$
بركة (ب)	3X	$\frac{V_1}{2X}$	$\frac{3V_1}{2}$	

حجم البركة (ب) هو العمل في * و ** ولذلك يتحقق :

$$V_2 = \frac{V_1}{9} + \frac{3V_1}{2}$$

$$V_2 = \frac{2V_1 + 27V_1}{18} = \frac{29V_1}{18}$$

$$V_2 = \frac{29}{18}V_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{29}{18}} \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{18}{29}}$$

سؤال 2

أ. بحسب المعطيات a_n حسابية فرضاً $d\neq 0$

$$a_7=-a_{17}$$

$$\Rightarrow a_1+6d=-[a_1+16d]$$

$$\Rightarrow a_1+6d=-a_1-16d \Rightarrow 2a_1+22d=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1+11d}_{a_{12}}=0 \Rightarrow \boxed{a_{12}=0}$$

ب.1 نبحث عن n بحيث $a_n=-a_1$

$$a_n=a_1+(n-1)d=-a_1$$

$$a_1+nd-d=-a_1 \Rightarrow 2a_1+nd-d=0$$

من البند (أ) نستنتج $a_1+11d=0 \Rightarrow \boxed{a_1=-11d}$

نعوض في النتيجة التي وصلنا اليها:

$$2a_1+nd-d=0$$

$$\Rightarrow 2(-11d)+nd-d=0 \Rightarrow -22d+nd-d=0$$

$$-23d+nd=0 \Rightarrow n\cancel{d}=23\cancel{d} \Rightarrow \boxed{n=23}$$

$d\neq 0$

إذاً: $\boxed{a_{23}=-a_1}$

ب.2 نبحث عن n بحيث يتحقق $S_n=0$

نستعمل الصورة $S_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$ لمجموع المتوالية الحسابية

بما أن $a_{23}=-a_1 \Leftarrow \boxed{a_1+a_{23}=0}$ وبالتالي:

$$S_{23}=\frac{23}{2}[a_1+a_{23}] \Rightarrow S_{23}=\frac{23}{2}\cdot[0]=0$$

إذاً $\boxed{n=23}$ الذي يحقق $\boxed{S_{23}=0}$

م- نبحث عن n بحيث يتحقق: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

اي نبحث عن حدين متتاليين حاصل ضربهم سالب

ولكي يكون حاصل الضرب سالب يجب ان يكون أحدهم موجب والآخر سالب.

يحسب البند (م) $a_{12}=0$ وبالتالي كل الحدود من a_1

وحتى a_{11} لها نفس الاشارة (موجبة او سالبة)

وكل الحدود بدءًا من a_{13} لها نفس الاشارة، واشارتهم

مضادة لاشارة الحدود من a_1 حتى a_{12} ولهذا

لن يكون حدين متتاليين حاصل ضربهم 0.

طريقة أخرى:

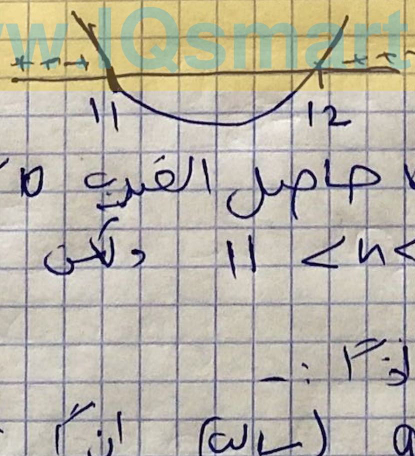
$$a_n \cdot a_{n+1} = [a_1+(n-1)d]\cdot[a_1+nd]$$

$$\Rightarrow (-11d+(n-1)d)(-11d+nd) < 0$$

$$(-11d+nd-d)(-11d+nd) < 0$$

$$(-12d+nd)(-11d+nd) < 0$$

$$n=12 \qquad n=11$$



وبالتالي لكي يكون حاصل الضرب $a_n \cdot a_{n+1} < 0$

يجب أن يكون $11 < n < 12$ ولكن n طبيعي لذلك لا يوجد n

ن. بما ان $a_1=-11d$ اذًا:

اذا كان $a_1<0$ (سالب) اذًا d موجب و $a_{12}=0$

وبالتالي سيكون 11 حد سالب

اذا كان $a_1>0$ (موجب) اذًا d سالب و $a_{12}=0$

وعندها كل الحدود ابتداءً من الحد الـ13 موجبة ولكن

بما أننا لا نعرف عدد حدود المتوالية لذلك لا يمكن معرفة عددها!

سؤال 3 :

أ) نحسب المعطيات:

بحوزة سامية مكعب متوازن على ثلاثة أوجه مسجل 2 وعلى 3 أوجه تسجل 4. لذلك عندما ترمي سامية المكعب فإن احتمال الحصول على 2 = احتمال الحصول على 4 = $\frac{1}{2}$.

بحوزة نادية مكعب متوازن آخر. وعلى كل واحد من أوجهه مسجل رقم 1 أو 3 ولكن غير معروف على كم وجه مسجل 1 وعلى كم وجه مسجل 3 .

بما انه الفائزة في الجولة هي التي تنتج على مكعبها رقم أكبر لذلك نادية تفوز فقط اذا كانت نتيجتها 3 ونتيجة سامية 2 .

بما ان احتمال فوز سامية في جولة واحدة هو $\frac{7}{12}$

اذاً احتمال فوز نادية في جولة واحدة هو $1-\frac{7}{12}=\boxed{\frac{5}{12}}$

نفرض احتمال الحصول على الرقم 3 عندما ترمي نادية المكعب هو P اذا احتمال فوز نادية هو

$$P\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}\longrightarrow P=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

اذاً احتمال الحصول على الرقم 3 عندما ترمي نادية المكعب هو $\frac{5}{6}$ وهذا معناه أنه على 5 أوجه في مكعبها مسجل العدد 3 والعدد 1 سيكون على وجه واحد فقط

ب) نادية تفوز باللعبة إذا فازت على الأقل بثلاث جولات من أصل 5

أي إذا فازت بـ 3 جولات أو 4 جولات أو 5 جولات:

$$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^5+\binom{5}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^2$$

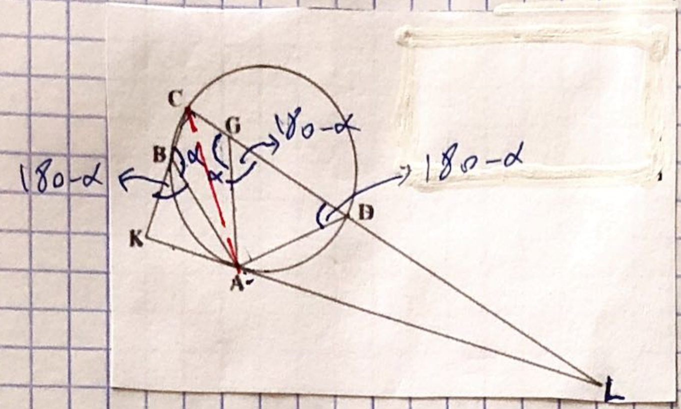
$$=0.0126+0.0879+0.2462=\boxed{0.3467}$$

ד إذا فازت ناديا بالجولة الأولى فعليها أن تفوز في جولتين إضافيتين على الأقل من أصل 4 . والاحتمال لذلك هو:

$$\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^4+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^1+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$=0.0301+0.1688+0.3545=\boxed{0.5534}$$

سؤال 4



أ. بحسب المعطيات:

شكل رباعي $ABCD$ محصور داخل دائرة

$AG=AB$ و $BC=CG$

لذلك $ABCG$ دالتون

نفرض $\measuredangle ABC=\alpha$ إذاً:

$\measuredangle ADC=180-\alpha$. شكل رباعي محصور داخل دائرة مجموع الزوايا المتقابلة 180.

$\measuredangle ABC=\measuredangle AGC=\alpha$ زوايا القاعدة في الدالتون متساوية

إذاً $\measuredangle AGD=\cancel{180-\alpha}$ مكملة لـ α.

إذاً في $\triangle AGD$ يوجد زاويتين متساويتين ولذلك الأضلاع المقابلة لها متساوية

$\measuredangle AGD=\measuredangle ADG=180-\alpha$

$\Rightarrow AD=AG$

وهو المطلوب (أ)

ب. $\triangle ABK \sim \triangle CDA$

$\measuredangle KBA=180-\alpha$ مكملة لـ α.

(1) $\measuredangle KBA=\measuredangle ADC$

* $\measuredangle KAB=\measuredangle ACK$ الزاوية المحصورة بين مماس (KL) ووتر (AB) تساوي الزاوية المحيطية $(\measuredangle ACB)$ المقابلة لنفس الوتر

** $\measuredangle ACB=\measuredangle ACG$ ← القطر الرئيسي في الدالتون $ABCD$ ينصف الزوايا التي يصل بينها.

إذاً من * و ** نستنتج أن:

(2) $\measuredangle ACD=\measuredangle KAB$

وبالتالي تشابه المثلثات $\triangle ABK \sim \triangle CDA$ حسب (ز،ز) [(1) و (2)]

وهو المطلوب!

ب.2 بحسب البند السابق: $AB=AG=AD$ ⟸ $AB=AD$

من التشابه في البند السابق، نسبة التشابه:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{BK}{AD}$$

$$\Rightarrow \boxed{AD^2=BK\cdot CD}$$

وهو المطلوب ب.2

ج:

$$S_{\triangle LDA} = \frac{AD \cdot AL}{2} \cdot \sin(\measuredangle DAL)$$

$$S_{\triangle KAB} = \frac{AB \cdot AK}{2} \cdot \sin(\measuredangle KAB)$$

$AB = AD$ ($AB=AD$ ، $ABCD$ دلتون و $AB=AD$ معطى البند (أ))

بحسب البند $\boxed{ب.1}$ (2): $\Leftarrow$ $\measuredangle ACD = \measuredangle KAB$ (**)

انتبه الى ان $\measuredangle ACL = \measuredangle ACG = \measuredangle ACD$ (نفس الزاوية)

(***) $\measuredangle DAL = \measuredangle ACD$ الزاوية المحصورة بين مماس AD ووتر مساوية للزاوية المحيطية المقابلة لنفس الوتر.

اذاً من دمج (***) و (**) نستنتج أن:

$$\measuredangle KAB = \measuredangle ACD = \measuredangle DAL$$

$$\Rightarrow \measuredangle KAB = \measuredangle DAL$$

$$\Rightarrow \sin \measuredangle KAB = \sin \measuredangle DAL$$

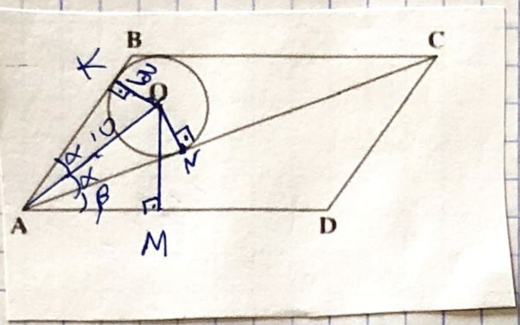
اذاً:

$$\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{\frac{AD \cdot AL}{2} \cdot \sin \measuredangle DAL}{\frac{AB \cdot AK}{2} \cdot \sin \measuredangle KAB}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \underbrace{\frac{\cancel{AD}}{\cancel{AB}}}_{1} \cdot \frac{AL}{AK} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{\sin \measuredangle DAL}}{\cancel{\sin \measuredangle KAB}}}_{1} = \frac{AL}{AK}$$

$$\boxed{\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{AL}{AK}}$$

سؤال 5



(أ) بحسب المعطيات:

بُعد O عن AD (طول العمود النازل من O على AD) هو 6

أي أن $\boxed{OM = 6}$

بُعد O عن القطر AC هو 3 $ON=3$

(OM نصف قطر الدائرة . لان المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس)

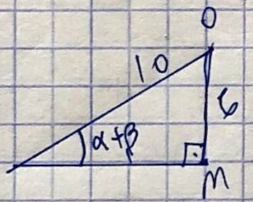
O هو مركز الدائرة المحصورة داخل المثلث ABC

اي ان O هو ملتقى منصفات الزوايا في المثلث ABC

نرسم OA ونصف القطر OK . ($OK=3$)

$OA=10$ هو منصف الزاوية $\measuredangle BAD$. ($\measuredangle OAK = \measuredangle OAN = \alpha$)

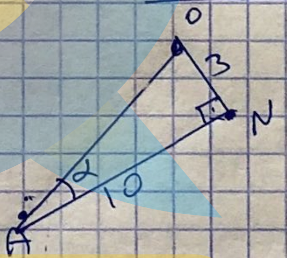
في $\triangle AOM$



$\sin(\alpha+\beta) = \frac{6}{10}$

$\boxed{(\alpha+\beta) = 36.87}$

في $\triangle ONA$



$\sin\alpha = \frac{3}{10}$

$\boxed{\alpha = 17.46}$

إذن:

$\boxed{\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = 2\alpha+\beta}$

$\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = 36.87 + 17.46$

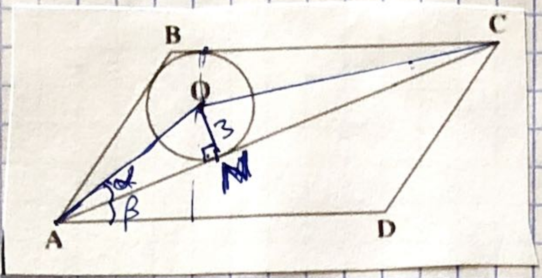
$\boxed{\measuredangle C = \measuredangle A = 54.33}$

$\measuredangle D = \measuredangle B = 180 - 54.33 = 125.67$

$$\boxed{\begin{array}{l}\measuredangle D = \measuredangle B = 125.67 \\ \measuredangle A = \measuredangle C = 54.33\end{array}}$$

(ب)

$\measuredangle BCN = \beta$ متبادلة بين متوازيين



$\alpha + \beta = 36.87$

$\beta = 36.87 - \alpha = 36.87 - 17.46$

$\beta = 19.41^\circ$

OC منصف الزاوية لـ $\measuredangle BCN$

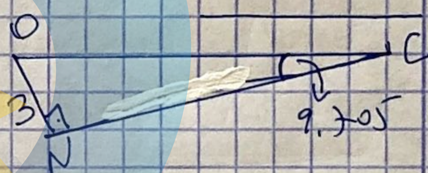
* مركز الدائرة ملتقى منصفات الزوايا.

لذلك $\measuredangle OCN = \frac{\measuredangle BCN}{2}$

$\measuredangle OCN = \frac{19.41}{2} = 9.705$

$\boxed{\measuredangle OCN = 9.705}$

في ΔOCN



$tg\, 9.705 = \frac{3}{NC}$

$\Rightarrow NC = \frac{3}{tg\, 9.705}$

$\boxed{NC = 17.54}$

$\boxed{AC = AN + NC}$

في ΔAON المتعامد:

$tg\alpha = \frac{ON}{AN}$

$tg\, 17.46 = \frac{3}{AN} \rightarrow AN = \frac{3}{tg\, 17.46}$

$AN = 9.54 \Rightarrow AC = 9.54 + 17.54$

$\boxed{AC = 27.08}$

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ض، ز، ض) P

لذلك :

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\measuredangle BAC}{2}$$

$\measuredangle BAC = 28$ 17.46 $\boxed{AC = 54.33}$

$$\Rightarrow \boxed{\measuredangle BAC = 34.92}$$

نجد طول الضلع AB

في المثلث ABC يتحقق :

$$\frac{AC}{\sin\measuredangle ABC} = \frac{AB}{\sin\measuredangle ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{27.08}{\sin(125.67)} = \frac{AB}{\sin 19.41} \Rightarrow \boxed{AB = 11.08}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin\measuredangle BAC = \frac{(11.08)\cdot(27.08)}{2} \cdot \sin 54.33$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC} = 85.88}$$

اذن :

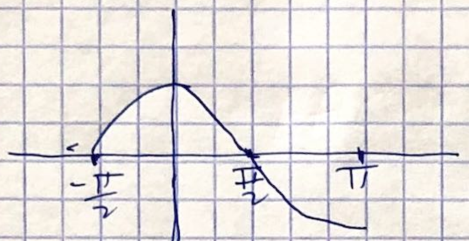
$$\boxed{S_{ABCD} = 2\cdot(85.88) = 171.76}$$

سؤال 6

$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ $\qquad$ $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$

أ.(1) مجال تعريف $f(x)$:

$\cos x > 0$



بحسب رسم الدالة $\cos$: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

أ.2 خطوط التقارب العمودية $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ (البسط لا يساوي 0)

أ.3 نجد $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos x}-\sin x\cdot\frac{(-\sin x)}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cos x\cdot\sqrt{\cos x}\cdot 2\sqrt{\cos x}+\sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}=\frac{\cos^2 x+\overbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}^{1}}{2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1+\cos^2 x}{2\sqrt{\cos x}\cdot\cos x}}$$

في مجال تعريف الدالة $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ تكون $f(x)$ موجبة دائمًا

لأن $\cos^2 x>0$ والمقام موجب

اذاً $f'(x)>0$ لكل x ضمن مجال تعريف الدالة

ولذلك $f(x)$ تصاعدية في المجال $-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}$

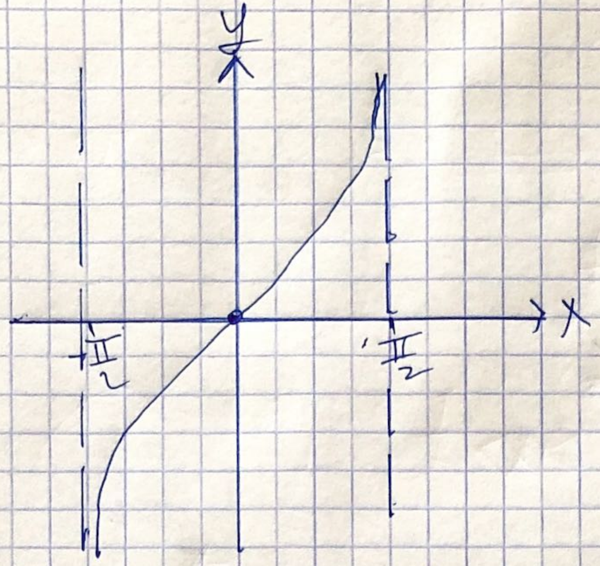
* مجال تنازلي: $\emptyset$.

4.أ - نرسم الدالة:

التقاطع مع المحاور:

$$f(0) = \frac{\sin 0}{\sqrt{\cos 0}} = 0$$

$(0,0)$



ب.1

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

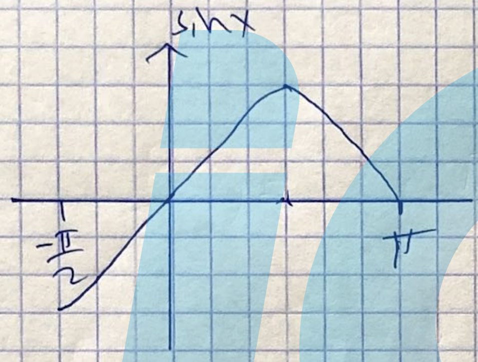
$$g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

مجال تعريف الدالة $\sin x > 0$

بحسب رسم دالة ال $\sin x$

مجال تعريف الدالة هو:

$$0 < x < \pi$$



ب.2

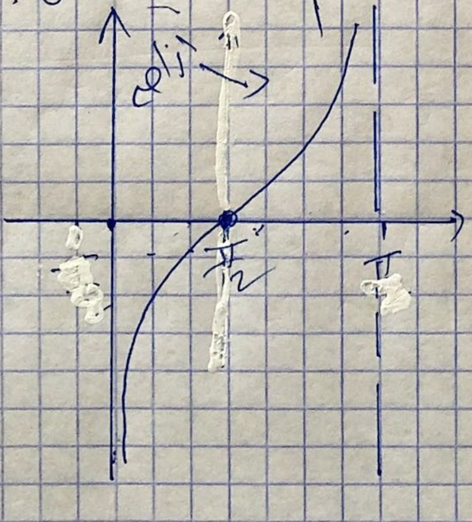
$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\sin x}} = -g(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -g(x)} \Rightarrow \boxed{g(x) = -f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

ب.3 بحسب (ب.2) رسم $g(x)$ عبارة عن: إزاحة $\frac{\pi}{2}$ للدالة $f(x)$ الى جهة اليمين ولذلك رسم الدالة $g(x)$. هو

إزاحة $\frac{\pi}{2}$ وحدات الى اليمين

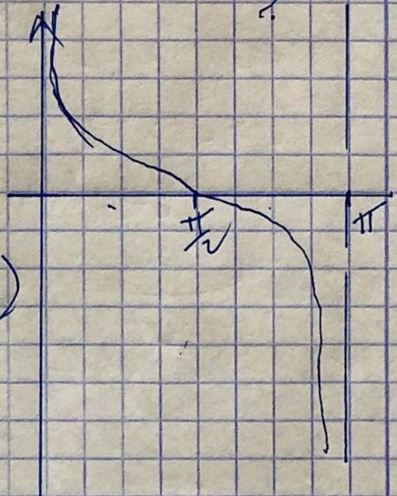
أولاً



ثم تغيير

$g(x) = -f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ثانياً



ⓟ الدالة $f(x)$ هي دالة فردية لأن رسمها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل $(0,0)$

ويمكن برهان ذلك جبريًا

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{\cos(-x)}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} = -f(x)$$

أي أن

$$f(x) = -f(x)$$

فالدالة فردية :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = ?$$

بما أن الدالة $f(x)$ فردية وسالبة في المجال $-\frac{\pi}{4}<x<0$

وموجبة في المجال $0<x<\frac{\pi}{4}$ لذلك يتحقق :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$

لذلك :

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = 0}$$

سؤال 7

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$$ برامتر a

أ *

$a<0$	$a>0$ *
① مجال تعريف الدالة	مجال التعريف $x^2\neq a$
الدالة معرفة لكل x	$x\neq\pm\sqrt{a}$

② التقاطع مع المحاور:

x مع $\Leftarrow f(x)=0 \Leftarrow (x-2)^2=0 \Leftarrow \boxed{x=2}$ $\quad \boxed{(2,0)}$

y مع $\Leftarrow x=0 \Leftarrow f(0)=\frac{(0-2)^2}{0^2-a}$

$f(0)=\frac{-4}{a} \Rightarrow \boxed{\left(0,-\frac{4}{a}\right)}$

أ.3 - خطوط تقارب أفقية:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{x^2}{x^2}=1 \qquad \boxed{\begin{matrix} y=1 \\ x\to\pm\infty \end{matrix}}$$

أ.4 خط تقارب عمودي

يوجد فقط عندما $a>0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{a}}$ أو $\boxed{x=-\sqrt{a}}$

* إذا كان $a<0$ لا يوجد خطوط تقارب عمودية

ب. نجد $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)\cdot1\cdot(x^2-a)-2x(x-2)^2}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-2)[(x^2-a)-\overset{x^2-2x}{x(x-2)}]}{(x^2-a)^2}=\frac{2(x-2)[2x-a]}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-a)}{(x^2-a)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow (x-2)(2x-a) = 0$$

$\boxed{x=2}$ أو $\boxed{x=\frac{a}{2}}$

تصنيف النقاط:

بما ان المقام دائماً موجب لذلك اشارة المشتقة الثانية في النقاط القصوى تحدد حسب إشارة البسط في النقاط القصوى.

$f''_{\text{البسط}} = ?$

$$f'_{\text{البسط}}(x) = (2x-4)(2x-a) = 4x^2 - 8x - 2ax + 4a$$

$$f''_{\text{البسط}} = 8x - 8 - 2a$$

$$f''(2) = 2 \cdot 8 - 8 - 2a = \boxed{8-2a}$$

ان كان $a<4$ اذن $8-2a>0$ اي $f''(2)>0$

وبالتالي $\boxed{x=2}$ [illegible]

$$f(2) = \frac{(2-2)^2}{2^2-a} = 0 \Longrightarrow \boxed{(2,0)\ max}$$

ان كان $a>4$ اذن $8-2a<0 \Longleftarrow f''(2)<0$

وعندها $\boxed{x=2}$ מקסימום $\Longleftarrow$ $(2,0)$ מקסימום

للتلخيص:

$a>4 \Longrightarrow (2,0)$ מקסימום

$a<4 \Longrightarrow (2,0)$ מינימום.

نفحص إشارة $f''(\frac{a}{2})$:

$$f''_{\text{البسط}} = 8x - 8 - 2a = 2(4x - a - 4)$$

$$f''\left(\frac{a}{2}\right) = 2\left(4\cdot\frac{a}{2} - a - 4\right) = 2(a-4)$$

מינימום $x=\frac{a}{2} \Leftarrow f''(\frac{a}{2})>0 \Leftarrow a>4$

מקסימום $x=\frac{a}{2} \Leftarrow f''(\frac{a}{2})<0 \Leftarrow a<0$

نجد $f(\frac{a}{2})$

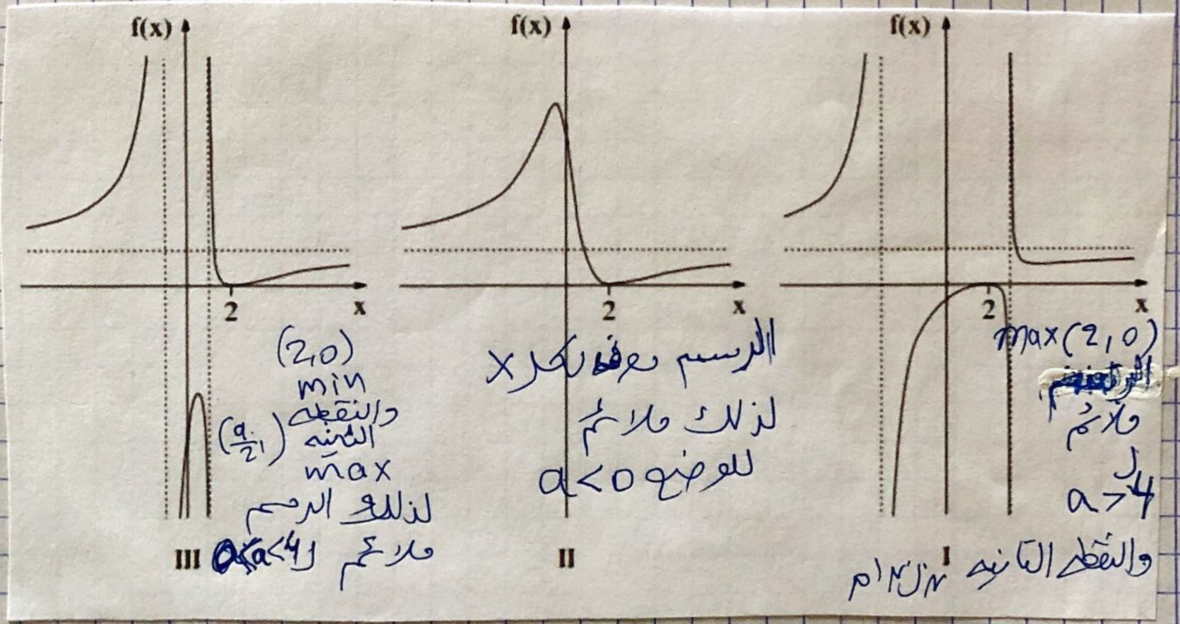
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\left(\frac{a}{2}-2\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a} = \frac{\frac{a^2}{4} - 2a + 4}{\frac{a^2}{4} - a}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a^2 - 8a + 16)}{\frac{1}{4}a(a-4)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}(a-4)^{\cancel{2}}}{\cancel{\frac{1}{4}}a\cancel{(a-4)}} = \frac{a-4}{a}$$

מינימום $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$ إذا كان $a>4$; أي:

מקסימום $\left(\frac{a}{2}, \frac{a-4}{a}\right)$ إذا كان $a<4$

ד.

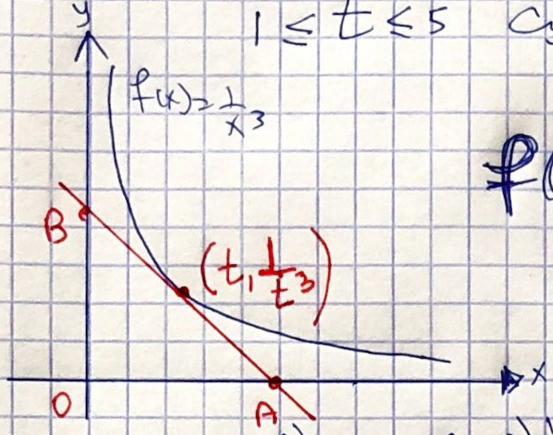


سؤال 8

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

نرسم مماسًا للدالة في $x=t$ حيث $1 \le t \le 5$

نجد معادلة المماس



نقطة التماس:

$$f(t) = \frac{1}{t^3}$$

$$\left(t, \frac{1}{t^3}\right)$$

ميل المماس $= f'(t)$

$$f'(x) = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

$$f'(t) = \frac{-3}{t^4}$$

إذًا ميل المماس $m = \frac{-3}{t^4}$ ونقطة التماس $\left(t, \frac{1}{t^3}\right)$

معادلة المماس من الصورة:

$$y = mx + n$$

$$\frac{1}{t^3} = t\left(\frac{-3}{t^4}\right) + n \Rightarrow \frac{1}{t^3} = -\frac{3}{t^3} + n \Rightarrow \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t^3} = n$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4}{t^3} = n} \Rightarrow y = \frac{-3}{t^4} \cdot x + \frac{4}{t^3}$$

تقاطع مع y: $\boxed{B: \left(0, \frac{4}{t^3}\right)}$

تقاطع مع x: $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-3}{t^4} \cdot x + \frac{4}{t^3} \rightarrow \frac{3}{t^4}x = \frac{4}{t^3}$

$$x = \frac{4t^4}{3t^3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{4t}{3}} \rightarrow \boxed{A: \left(\frac{4t}{3}, 0\right)}$$

$$\boxed{OA = \frac{4t}{3}} \qquad \boxed{OB = \frac{4}{t^3}}$$

الدالة التي تعبر عن مجموع أطوال OA و OB

$$\boxed{l(t)=\frac{4t}{3}+\frac{4}{t^3}} \Rightarrow \boxed{l(t)=\frac{4t}{3}+4t^{-3}}$$

$$l'(t)=\frac{4}{3}+4\cdot\frac{(-3)}{t^4}=\frac{4}{3}-\frac{12}{t^4}$$

$$l'(t)=\frac{4}{3}-\frac{12}{t^4}=0 \Rightarrow \frac{4}{3}=\frac{12}{t^4} \Rightarrow t^4=9$$

$$\Rightarrow t=\pm\sqrt[4]{9}=\mp\sqrt{3}$$

$1\le t\le 5$

لذلك $t=-\sqrt{3}$ غير ملائم

اذ $\boxed{t=\sqrt{3}}$

نفحص النقطة حسب l'':

$$l'(t)=\frac{4}{3}-\frac{12}{t^4}$$

$$l''(t)=0-12\cdot\frac{(-4)}{t^5}=\frac{48}{t^5}$$

$$l''(\sqrt{3})=\frac{48}{(\sqrt{3})^5}>0 \Rightarrow \boxed{\underset{min}{t=\sqrt{3}}}$$

ب. الدالة $l(t)$ هي دالة متتابعة في المجال $1\le t\le 5$

وبما أن $t=\sqrt{3}$ هي نقطة مينيمום لذلك نقطة

الـ مكسيمום تكون في أطراف المجال أي اما في $t=1$

او في $t=5$. نجد قيمة الدالة في الأطراف ونحدد الـ مكسيمום:

$$l(1)=\frac{4}{3}(1)+\frac{4}{1^3}=5\frac{1}{3}$$

$$l(5)=\frac{4}{3}\cdot 5+\frac{4}{5^3}=\frac{20}{3}+\frac{4}{125}=\boxed{6.365}$$

إذاً الإحداثي x لنقطة التماس الذي يعطينا أكبر مجموع للأطوال

الساقين هو $\boxed{x=5}$