حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد شتاء 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

أ. بحسب المعطيات الحد الثالث هو 8 اضعاف الحد السادس اي يتحقق :-

$$a_3 = 8a_6$$

(بالضرورة $a_1 \neq 0$) $\cancel{a_1} \cdot q^2 = 8\cancel{a_1} \cdot q^5 \xrightarrow{:q^2} q^2 = 8q^5 \Rightarrow 1 = 8q^3$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = q^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = q \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} = q}$$

اذا المتوالية الهندسية اللا نهائية التي حصلنا عليها هي متوالية متقاربة $\boxed{q = \frac{1}{2}}$ وهذا معناه ان مجموعها :

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

لذلك نعبر عن مجموع كل الحدود $q = \frac{1}{2}$ في المتوالية بدالة a_1 :

$$\boxed{S_{\text{كل حدود المتواليه}} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2a_1}}$$

المتوالية التي تتألف من الحدود التي بالاماكن الزوجيه هي : b_n بحيث $\boxed{b_1 = a_2 = a_1 q}$

اساس هذه المتواليه هو $q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

اذا مجموعها هو :-

$$S_{\text{الاماكن الزوجيه}} = \frac{a_1 \cdot q}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a_1 \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$S_{\text{الاماكن الزوجيه}} = a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}a_1}$$

وبالتالي النسبه بين المجموعين هي :

$$\frac{S_{\text{كل المتواليه}}}{S_{\text{الزوجيه}}} = \frac{2\cancel{a_1}}{\frac{2}{3}\cancel{a_1}} = \boxed{3}$$

اي ان مجموع حدود المتواليه يشكل 3 اضعاف الحدود في الاماكن الزوجيه

ب. لحسب المعطى: الحدود التي في الاماكن الفردية مجموعها 2

الحدود التي في الاماكن الفردية هي: $a_1, a_3, a_5, ...$

وأساسها $\boxed{q^2 = \frac{1}{4}}$ اي يتحقق:

$$S_{\text{الفردية}} = \frac{a_1}{1-\frac{1}{4}} = 2 \Rightarrow \frac{a_1}{\frac{3}{4}} = 2 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{2} = 1.5}$$

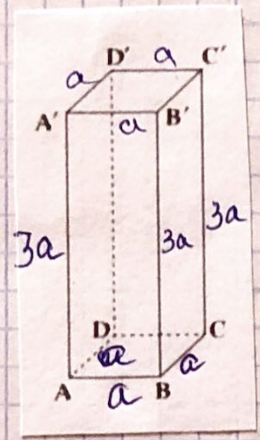
اذا: $a_1 = 1.5$ $q = \frac{1}{2}$ والحد الثالث a_3 هو:

$$a_3 = 1.5\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{3}{8}}$$

حل سؤال 2 :

بحسب المعطيات:

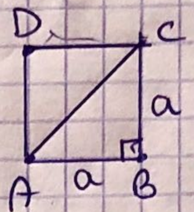


قاعدة الصندوق هي مربع طول ضلعه $AB=a$

$AA'=3a$.

أ. AC هو قطر القاعدة اي قطر المربع $ABCD$

حسب فيثاغورس

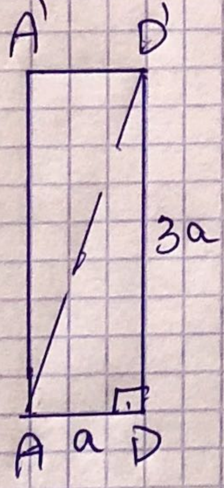


$$AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$$

$$AC^2=2a^2$$

$$AC=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a$$

$$\boxed{AC=\sqrt{2}\,a}$$



AD' هو قطر الوجه الجانبي - المستطيل $AA'D'D$

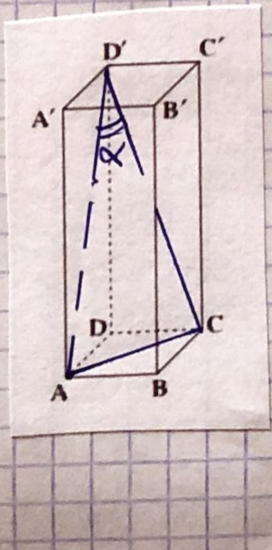
بحسب فيثاغورس نتحقق:

$$(AD')^2=(AD)^2+(DD')^2$$

$$(AD')^2=a^2+(3a)^2=a^2+9a^2=10a^2$$

$$(AD')^2=10a^2 \rightarrow (AD')=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}\,a$$

$$\boxed{AD'=\sqrt{10}\,a}$$



2 أ. الاوجه الجانبية في الصندوق عبارة عن مستطيلات متطابقة ولذلك اقطارها متساوية ← $AD'=D'C$

ب. زاوية $AD'C$ هي الزاوية المبينة بالرسم

المثلث $AD'C$ هو مثلث متساوي الساقين

فيه $AD'=D'C=\sqrt{10}a$ و $AC=\sqrt{2}a$ وبالتالي بحسب قانون cos

نتحقق:

$$AC^2=(AD')^2+(D'C)^2-2(AD')\cdot(D'C)\cdot\cos\alpha$$

$$(\sqrt{2}a)^2=(\sqrt{10}a)^2+(\sqrt{10}a)^2-2(\sqrt{10}a)(\sqrt{10}\cdot a)\cdot\cos\alpha$$

$$2a^2=\overbrace{10a^2+10a^2}^{20a^2}-20a^2\cdot\cos\alpha$$

$$2a^2-20a^2=-20a^2\cdot\cos\alpha \rightarrow -18a^2=-20a^2\cdot\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{-18a^2}{-20a^2}=\cos\alpha \rightarrow \frac{18}{20}=\cos\alpha \rightarrow 0.9=\cos\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha=25.84^\circ}$$

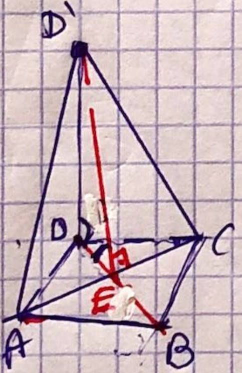
ج. مساحة المثلث $AD'C$ هي: $\frac{AD'\cdot D'C\cdot \sin\alpha}{2}$

$$\rightarrow S_{\Delta AD'C}=\frac{\sqrt{10}\cdot a\cdot\sqrt{10}\cdot a\cdot\sin(25.84)}{2}=\frac{10\cdot a^2\cdot 0.436}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{\Delta AD'C}=2.179\,a^2}$$

د. DE' هو ارتفاع المثلث $AD'C$.

بما ان المثلث $AD'C$ متساوي الساقين لذلك الارتفاع $D'E$ النازل على القاعدة AC ينصفها وينصف $\measuredangle AD'C$



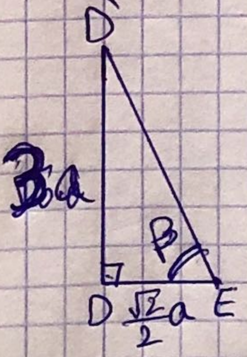
اي يتحقق: $AE=EC$

بما ان اقطار القاعدة $ABCD$ (المربع) متساوية لذلك يتحقق $DE=EB=EC=AE$

$\boxed{DE=EC=\frac{\sqrt{2}}{2}a} \Leftarrow DE=EC=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}$

الزاوية بين قاعدة الصندوق و DE' هي $\measuredangle D'ED$

المثلث $D'ED$ قائم الزاوية ولذلك يتحقق:



$$tg(\measuredangle D'ED)=\frac{D'D}{DE} \rightarrow tg\beta=\frac{3\cancel{a}}{\frac{\sqrt{2}\cancel{a}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$tg\beta=\frac{6}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\beta=76.74^\circ}$$

اذاً: $\boxed{\measuredangle D'ED=76.74^\circ}$

حل سؤال 3

$f(x)=3\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad -\pi\le x\le\pi$

1.P تقاطع الدالة مع المحاور:

تقاطع مع y $\leftarrow$ $(x=0)$

$f(0)=3\cdot\sin\left(0-\frac{\pi}{2}\right)=$

$f(0)=3\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot(-1)=-3$

$\boxed{\text{تقاطع مع } y \quad (0,-3)}$

تقاطع مع x ، نعوّض $f(x)=0$:-

$0=3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

الحل العام :- $\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=\pi k$

في المجال المعطى:

$k=0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$k=1 \Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow x=1.5\pi$ خارج المجال

$k=-1 \Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=-\pi \Rightarrow \boxed{x=-\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{اذاً التقاطع مع } x: \left(\frac{\pi}{2},0\right) \quad \left(-\frac{\pi}{2},0\right)}$

2.P النقاط القصوى:

$f'(x)=3\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$0=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\cancel{x}-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=\pi+\pi k$

في المجال المعطى نقاط الشك هي:

$x=-\pi \;//\; 0 \;//\; \pi$

$\boxed{k=-2} \quad \boxed{k=-1} \quad \boxed{k=0}$

نصنف النقاط القصوى بواسطة المشتقة الثانية $f''(x)$

$$f'(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{f''(x) = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$f''(\pi) = -3\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin\frac{\pi}{2} = -3\cdot(1) = -3 < 0$$

اذاً $x=\pi$ هي مكسيموم وهي طرف المجال

$$f(\pi) = 3\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\pi = 3$$

$\boxed{\text{اذاً } (\pi,3) \text{ مكسيموم.}}$

$$f''(0) = -3\sin\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -3\cdot(-1) = 3 > 0$$

اذاً $x=0$ مينيموم

$$f(0) = 3\sin\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -3$$

$\boxed{\text{اذاً: } (0,-3) \text{ مينيموم}}$

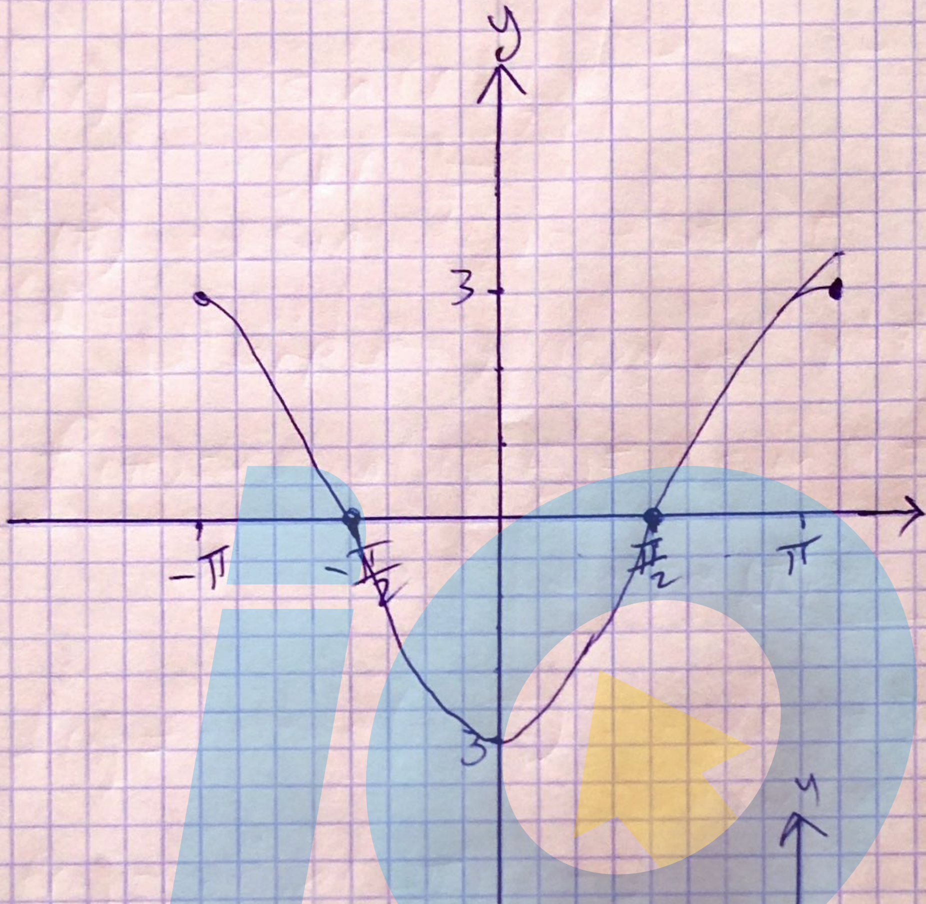
$$f''(-\pi) = -3\sin\left(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin(-1.5\pi) = 3$$

اذاً $x=-\pi$ مكسيموم

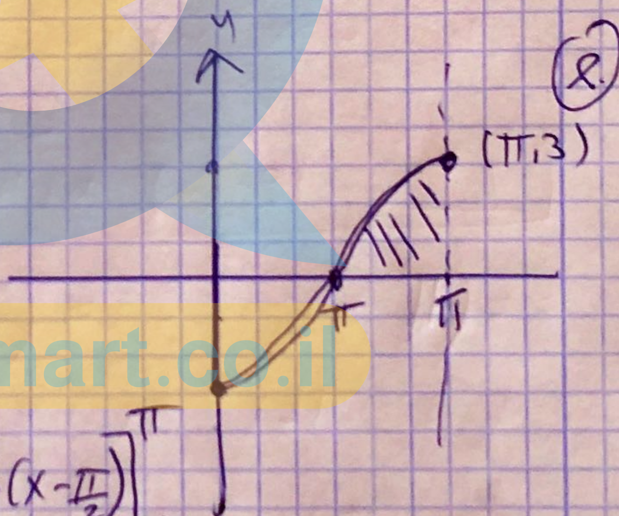
$$f(-\pi) = +3\sin\left(-\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -3\sin(-1.5\pi) = 3$$

$\boxed{\text{اذاً } (-\pi,3) \text{ مكسيموم}}$

ب. نرسم رسم تقريبي للدالة:



(2)



المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة بالرسم، وهذه المساحة هي:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = \left[-3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left[-3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-3\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \boxed{3}$$

سؤال 4

$$f(x) = 4^{2x} - 4^{x} - 2$$

1. الدالة معرفة لكل x

2. نقاط تقاطع مع المحاور:

مع المحور x: $\boxed{y=0}$ $\leftarrow$ $4^{2x} - 4^{x} - 2 = 0$

نعوض $4^x = t$ ونحصل على معادلة تربيعية:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

نحل المعادلة حسب الدستور ونحصل على:

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 2$

نجد x:

$t = 4^x \Longrightarrow -1 = 4^x \longrightarrow$ لا يوجد حل لأن 4^x دائما موجب

$t = 4^x \Longrightarrow 2 = 4^x \Longrightarrow 4^{\frac{1}{2}} = 4^x \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{اذاً التقاطع مع } x : \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)}$

التقاطع مع y: $x = 0$

$0 = 4^{2\cdot 0} - 4^{0} - 2 = -2$

اذاً التقاطع مع y: $(0, -2)$

3.

$f'(x) = 4^{2x} \cdot 2\ln 4 - 4^{x} \cdot \ln 4$

نعوض $f'(x) = 0$

$0 = 4^{2x} \cdot 2\ln 4 - 4^{x} \cdot \ln 4$

$0 = \underbrace{4^{x} \ln 4}_{\text{لن يساوي } 0} (2 \cdot 4^{x} - 1) \Longrightarrow 2 \cdot 4^{x} - 1 = 0 \Longrightarrow 4^{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$2^{2x} = 2^{-1} \longrightarrow 2x = -1 \longrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

نصنف النقطة $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

x	$x=-1$	$-\frac{1}{2}$	$x=0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=4^{2\cdot(-\frac{1}{2})}-4^{-\frac{1}{2}}-2$$

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.25}$$

$$f'(-1)=4^{2(-1)}\cdot 2\ln 4-4^{-1}\ln 4=-0.17<0$$

$$f'(0)=4^{2\cdot 0}-4^{0}\ln 4=1.38>0$$

اذاً $\left(-\frac{1}{2},-2.25\right)$ مينيمام

ب.1 $g(x)=-2f(x) \leftarrow -\frac{1}{2}g(x)=f(x)$

بما $\left(-\frac{1}{2},-2.25\right)$ هي مينيمام لـ $f(x)$ و $g(x)=-2f(x)$

لذلك $x=-\frac{1}{2}$ يتحول لنقطة مكسيمام لـ $g(x)$

والاحداثي y لها هو $-2\cdot f(-\frac{1}{2})$ اي $-2\cdot(-2.25) \leftarrow 4.5)$

اذاً $(-2,4.5)$ هو نقطة مكسيمام لـ $g(x)$

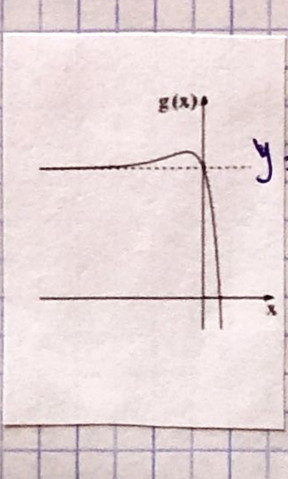
$\boxed{(-2,4.5) \text{ مكسيمام } g(x)}$

ب.2

بما ان $-\frac{1}{2}g(x)=f(x)$

لذلك خط التقارب الافقي للدالة $f(x)$ هو $(\frac{-1}{2}\cdot 4)$

اي $y=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2 \rightarrow \boxed{y=-2}$ خط التقارب الافقي لـ f.



$y=4$

ب. الرسم البياني لـ $f(x)$

نلخص النتائج التي توصلنا لها بخصوص $f(x)$

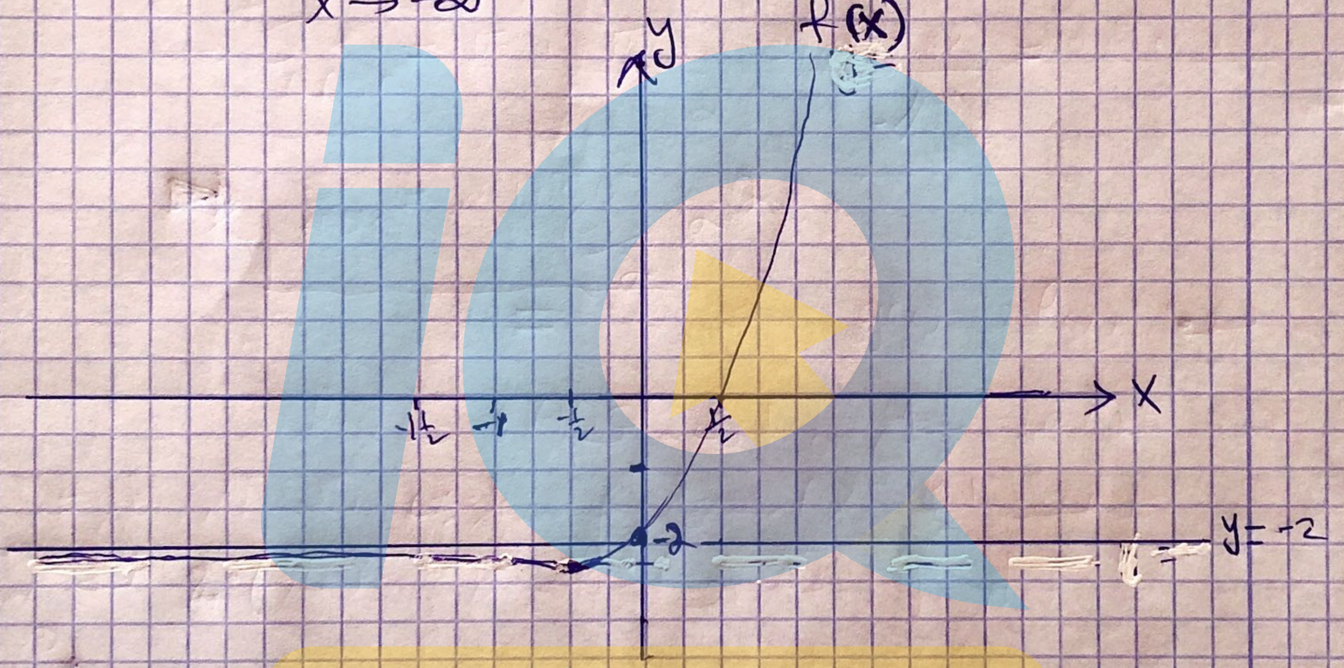
نقاط مع المحاور: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $(0, -2)$.

نقطة نهاية صغرى مينيمום $\left(-\frac{1}{2}, -2.25\right)$

خط تقارب افقي

$y = -2$

$x \to -\infty$



حل سؤال 5

$$f(x)=\frac{2\ln x+3}{3}$$

1. مجال تعريف الدالة $x>0$

2. تقاطع مع y $(x=0)$ ← لا يوجد لأن مجال تعريف الدالة $x>0$

تقاطع مع x $(y=0)$

$$0=\frac{2\ln x+3}{3} \longrightarrow 0=2\ln x+3$$

$$\longrightarrow -3=2\ln x \longrightarrow -1.5=\ln x$$

$$\longrightarrow e^{-1.5}=x \longrightarrow x=0.22$$

تقاطع مع x $(e^{-1.5},0)$ أو $[(0.22,0)]$

3. المجالات التصاعدية والتنازلية:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 2\,\frac{1}{x}+0=\frac{2}{3x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3x}$$

بما ان مجال تعريف الدالة $x>0$ فإن

$f'(x)>0$ لكل x

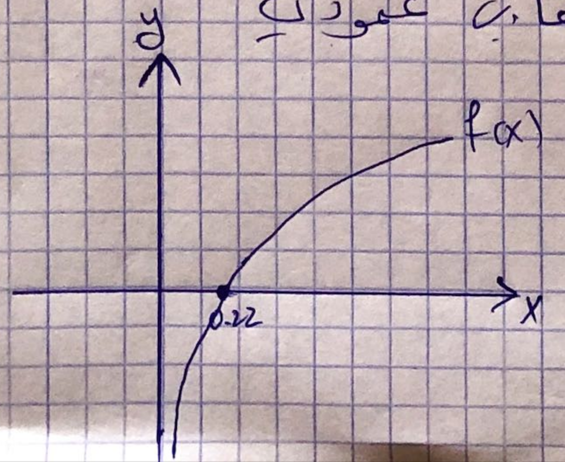
اي ان الدالة تصاعدية لكل x في مجال تعريفها $(x>0)$.

4. خط التقارب العمودي

بما ان الدالة تصاعدية في مجال تعريفها $x>0$

لذلك $x=0$ هو خط تقارب عمودي

5. الرسم البياني للدالة:



ب.1 $f'(x)=\frac{2}{3x}$

خط التقارب العمودي $\boxed{x=0}$ (المقام = 0)

خط التقارب الأفقي:

عندما $x\to+\infty$ فإن المقام $(3x)$ تقترب من $+\infty$

ولذلك $f(x)=\frac{2}{3x}$ تقترب من $\frac{2}{\infty}\to 0$

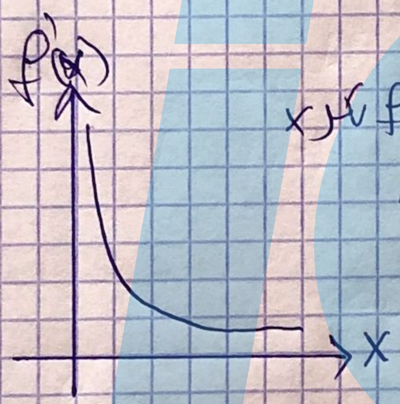
لذلك $y=0$ هو خط تقارب افقي

2. الرسم التقريبي للدالة $f'(x)$

بما ان $f'(x)$ تصاعدية لذلك $f'(x)$ تكرس x

$x=0$, $y=0$ خطوط تقارب.

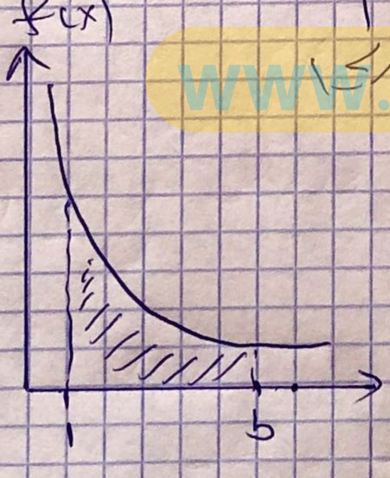
لا يوجد تقاطع مع المحاور.



ج. نجد المساحة المعطاة على الرسم

بما ان $f'(x)$ موجبة في المجال $1<x<b$

لذلك



$$S=\int_1^b f'(x)\,dx$$

$$S=\left[f(x)\right]_1^b=\ln 4$$

$$\to \left[\frac{2\ln x+3}{3}\right]_1^b=\left[\frac{2\ln b+3}{3}\right]-\left[\frac{2\ln 1+3}{3}\right]$$

$$\to \left[\frac{2\ln b}{3}+\cancel{1}\right]-\left[\frac{2\overset{0}{\ln 1}}{3}+\cancel{1}\right]=\ln 4$$

$$\frac{2\ln b}{3}=\ln 4 \to \ln b=\frac{3\ln 4}{2}=\ln 4^{1.5}$$

$$b=4^{1.5}\to \boxed{b=8}$$