حل نموذج بجروت

(804)-481

موعد شتاء 2018

www.IQsmart.co.il

معهد IQ

بيروت 806 موند شتاء 2018

السؤال الأول :

(أ)
- نفرض ان عدد المنتجات التي اشتراها التاجر هي : X
- نفرض ان سعر المنتج الواحد هو : y
- دفع التاجر مقابل جميع المنتجات :

(I) $\boxed{X.y = 6000}$

(II) $\boxed{y = \frac{6000}{x}}$

- باع التاجر 10٪ من المنتجات ($0.1X$) بربح 40 للمنتج ، ابقى 20 في المخزن والباقي $(X - 0.1X - 20 = 0.9X - 20)$ باعهم بربح 60٪ (اي بسعر $1.6y$) $(y + 0.6y = 1.6y)$

وكان دخله من البيع : 7,520 ، أي :

(III) $40 \cdot 0.1X + 1.6y(0.9X - 20) = 7,520$

$4X + 1.44yX - 32y = 7,520$

$\left[* X.y = 6000 \;,\; * y = \frac{6000}{X} \right]$

$4X + 1.44 \cdot 6000 - 32 \cdot \frac{6000}{X} = 7,520$ / $\cdot X$

$4X^2 + 8640X - 192,000 = 7520X$

$4X^2 + 1120X - 192,000 = 0$ / $\div 4$

$X^2 + 280X - 48,000 = 0$

$$\frac{-280 \pm \sqrt{78,400 - 4(-48,000)}}{2}$$

$$\frac{-280 \pm 520}{2} \rightarrow \frac{240}{2} = \boxed{120}$$

$$\frac{-800}{2} = -400 \quad \text{(مرفوض)}$$

$X > 0$ بالضرورة

من هنا عدد المنتجات التي اشتراها التاجر هي $\boxed{120 \text{ منتج}}$

www.IQsmart.co.il

(ب) فيد سعر المنتج (y):

$$y = \frac{\text{تكلفة}}{\text{الكمية}} = \frac{50}{\text{شيكل للمنتج}}$$

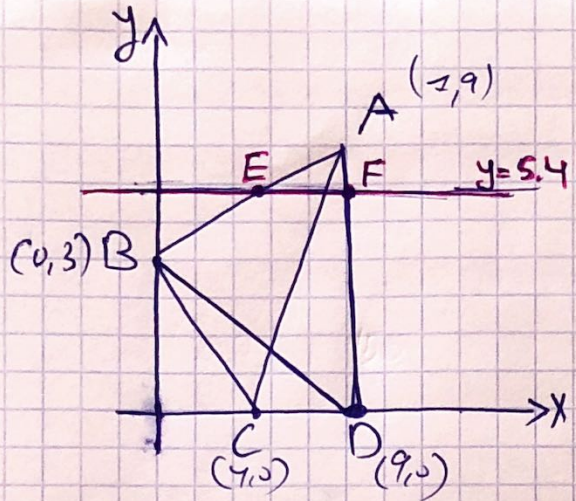
باع التاجر 20 منتج المتبقيات بنسبة ربح 200% (اي $50 \cdot 300\% = 150$ شيكل)

وكان دخله من بيعهم:

$$150 \cdot 20 = \boxed{3000 \text{ شيكل}}$$

www.IQsmart.co.il

السؤال الثاني :



ABCD دالتون ، AB = AD ، CB = CD

$y_{BD} = -\frac{1}{3}x + 3$

(P) نعوض $x = 0$ في معادلة BD ونجد احداثي y للنقطة B :

$y_B = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 3$

$y_B = 3 \Rightarrow \boxed{B(0,3)}$

نعوض $y = 0$ في معادلة BD ونجد احداثي X للنقطة D :

$0 = -\frac{1}{3}x_D + 3 \quad / \cdot -3$

$0 = x_D - 9$

$\boxed{x_D = 9} \Rightarrow \boxed{D(9,0)}$

وبما ان المثلث دالتون ومعطى ان CD = BC ومعطى ان C تقع على محور X اذا $C(x_c, 0)$ ، وعليه معادلة الطول نجد x_c :

$\overline{BC} = \overline{CD}$

* CD يقع على محور X اذا طول CD : $x_D - x_c$.

$\left(\sqrt{(0-x_c)^2 + (3-0)^2}\right)^2 = (9-x_c)^2$

$x_c^2 + 9 = 81 - 18x_c + x_c^2$

$18x_c = 72 \quad / : 18$

$\boxed{x_c = 4} \rightarrow \boxed{C(4,0)}$

(ب) معطى $A(7,9)$.

مساحة المثلث دالتون : $\frac{AC \cdot BD}{2}$.

$\overline{AC} = \sqrt{(9-0)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{90}$

$\overline{BD} = \sqrt{(0-3)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{90}$

www.IQsmart.co.il

$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{90} \cdot \sqrt{90}}{2} = \boxed{45 \text{ وحدات مساحة}}$$

ب) طول EF هو $S_{\triangle DEF}$

المستقيم $y = 5.4$ يقطع AB و AD في E و F بالترتيب

$$y_F = y_E = 5.4 \quad (1)$$

طول الارتفاع من النقطة A على القاعدة EF: (نفرضه h)

$$h = y_A - y_F = 9 - 5.4 = \underline{3.6}$$

$$S_{\triangle DEF} = \frac{h \cdot EF}{2} = \frac{3.6 \cdot 5}{2} = \boxed{9 \text{ وحدات مساحة}}$$

(2) مساحة EFDCB هي عبارة عن مساحة المثلث ناقص مساحة $\triangle DEF$:

$$S_{EFDCB} = S_{ABCD} - S_{\triangle DEF} = 45 - 9 = \boxed{36 \text{ وحدة مساحة}}$$

www.IQsmart.co.il

السؤال الثالث :

احتمال ان يكون العدد على المكعب اكبر من 2 هو : $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

واحتمال ان تسقط القطعة النقدية على الكتابة هو : $\frac{1}{2}$.

(أ) ① من هنا، احتمال فوز نادية مباشرة، هو احتمال ان يكون العدد على المكعب اكبر من 2 ($\frac{2}{3}$) ضرب احتمال ان تسقط القطعة النقدية في المرتين على الكتابة ($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$) .

من هنا:

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

② $\binom{4}{2}\left(\text{تفوز مباشرة}\right)^2\left(\text{لا تفوز مباشرة}\right)^2=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\boxed{\frac{25}{216}}$

(ب) ① الاحتمال ان يكون مجموع العددين اصغر من 10 هو :

نكتب كل الامكانيات: * في الرمية الاولى 1

والرمية الثانية 1

① 1+1 .

② 1,2

③ 1,3

④ 1,4

⑤ 1,5

⑥ 1,6

⑦ 2,1

⑧ 2,2

⑨ 2,3

⑩ 2,4

⑪ 2,5

⑫ 2,6

⑬ 3,1

⑭ 3,2

⑮ 3,3

⑯ 3,4

⑰ 3,5

⑱ 3,6

⑲ 4,1

⑳ 4,2

㉑ 4,3

㉒ 4,4

㉓ 4,5

㉔ 5,1

㉕ 5,2

㉖ 5,3

㉗ 5,4

㉘ 6,1

㉙ 6,2

㉚ 6,3

www.iqsmart.co.il

اي هنالك 30 امكانية من اصل 36 امكانية ، اي الاحتمال :

$$\frac{30}{36} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

* طريقة اخرى :

في الاحتمال ان يكون المجموع 10 او اكبر من 10 ونطرحه من 1 صحيح :

(1) 6,6	6 امكانيات من اصل 36 امكانية
(2) 6,5	
(3) 6,4	
(4) 5,6	
(5) 5,5	
(6) 4,6	

اي $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

بالتالي احتمال ان يكون المجموع اصغر من 10 هو :

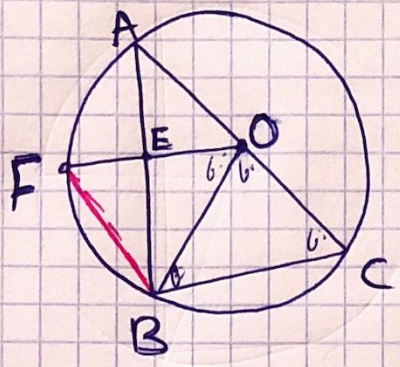
$$1 - \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

www.IQsmart.co.il

(2) احتمال ان تسقط القطعة النقدية على الصورة هو : $\frac{1}{2}$.

$$\text{احتمال الفوز} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

السؤال الرابع :



(أ) $OE \perp AB$

حسب النظرية الزاوية المحيطية المقابلة للقطر تساوي 90° (زاوية قائمة)

من هنا، $\angle ABC$ قائمة.

وينتج ان $\angle AEO = \angle ABC$ ، زوايا متناظرة متساوية اذا ينتج $EO \parallel BC$

من هنا ينتج ان EO قاعدة متوسطة في $\triangle ABC$ وذلك لان O منتصف القطر AC و $BC \parallel EO$.

(ب) $\triangle AOB$ متساوي الساقين $(AO=OB)$ وبما ان $AB \perp OE$ اذا OE هو ارتفاع في المثلث بالتالي هو ينصف $\angle AOB$ $(\angle AOE = \angle EOB)$.

من هنا، وحسب النظرية الزوايا المركزية المتساوية تقابل اوتار متساوية في الدائرة ينتج ان $AF=FB$ $(\angle AOE = \angle FOB)$

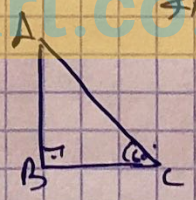
اي ان $\triangle AFB$ متساوي الساقين.

(ج) $\angle ACB = 60°$

$\triangle ABC$:

$\angle BAC = 180 - 90 - 60$

$\angle BAC = 30°$



حسب النظرية : في المثلث القائم، الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف الوتر، من هنا $BC = \frac{1}{2}AC$ اي $BC = OC$ (يساوي نصف القطر)

$\triangle OBC$ ينتج انه مثلث متساوي الاضلاع $(OB=OC=BC)$

[redacted]

وبما سبقاً ان $FO \parallel BC$ $(OE \parallel BC)$

نجد $\angle FOB = \angle OBC$ بالتناظر

[redacted]

$\triangle FOB$ متساوي الساقين ($OF = OB$)

إذاً $\angle OFB = \angle OBF = \frac{180 - \alpha}{2} = \beta$

أي ينتج لدينا الزوايا الثلاث جميعها متساوية ومقدارها $60°$

بالتالي ينتج لنا $\triangle OFB$ متساوي الأضلاع.

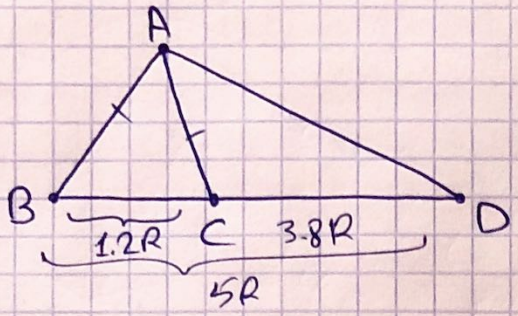
وكذلك ينتج أن $OC \parallel FB$ (بالتبادل $\angle COB = \angle OBF$).

أي: ينتج $OFBC$ متوازي الأضلاع ($BC \parallel OF$ و $BF \parallel OC$)

وكذلك وجدنا أن $OC = OF$ أي متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متساويين، ينتج أن الشكل معين (معين $OFBC$)

www.IQsmart.co.il

السؤال الخامس :

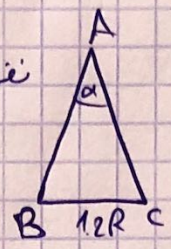


(أ) $AB = AC$

$BC = 1.2R$ ، R نصف قطر الدائرة التي تحصر $\triangle ABC$.

① $\triangle ABC$:

نعرف α زاوية $\measuredangle BAC$.



بواسطة قانون sin الموسع :

$$\frac{BC}{\sin(\measuredangle BAC)} = 2R$$

$$\frac{1.2R}{\sin(\alpha)} = 2R$$

$$0.6 = \sin(\alpha)$$

$$\measuredangle BAC = \boxed{\alpha = 36.86^\circ}$$

بما أن : $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = \frac{180 - \alpha}{2}$

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = \frac{180 - 36.86}{2}$$

$$\boxed{\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 71.57^\circ}$$

② بواسطة قانون sin الموسع :

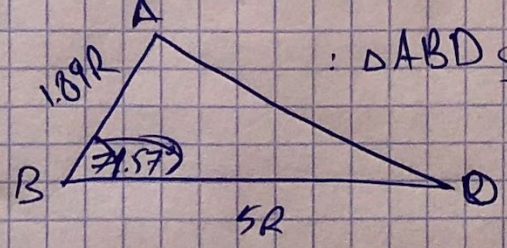
$$\frac{AB}{\sin(\measuredangle ACB)} = 2R$$

$$AB = 2R \cdot \underbrace{\sin(71.57^\circ)}_{0.948}$$

$$\boxed{AB = 1.89R}$$

(ب) $CD = 3.8R$ أي $BD = 1.2R + 3.8R = \underline{5R}$

بواسطة قانون جيب الموسع في $\triangle ABD$:



www.IQsmart.co.il

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\measuredangle ABD)$$

$$AD^2 = (1.89R)^2 + (5R)^2 - 2 \cdot 1.89R \cdot 5R \cdot \cos(71.57^\circ)$$

$$AD^2 = 28.5721R^2 - 5.975R^2$$

$$\sqrt{AD^2} = \sqrt{22.5969R^2}$$

$$\boxed{AD = 4.753R}$$

(א.) נמצא את $\measuredangle ACD$ בעזרת הזווית ב-R.

$$S_{\triangle ACD} = \frac{AE \cdot CD}{2} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(\measuredangle ACD)}{2}$$

$$\measuredangle ACD = 180^\circ - \measuredangle ACB = 180^\circ - 71.57^\circ = 108.43^\circ$$

(I) $$S_{\triangle ACD} = \frac{AE \cdot CD}{2} = \frac{9 \cdot 3.8R}{2} = \frac{34.2R}{2} = \boxed{17.1R}$$

(II) $$S_{\triangle ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot \sin(108.43^\circ)}{2} = \frac{1.89R \cdot 3.8R \cdot 0.9487}{2} = \boxed{3.407R^2}$$

$\measuredangle AC = AB = 1.89R$

$\Rightarrow$ (I) = (II)

$$17.1R = 3.407R^2 \quad / : R$$

$$17.1 = 3.407R \quad / : 3.407$$

$$R = 5.01 \approx 5$$

$$\boxed{R = 5}$$ ש"ל

www.IQsmart.co.il

السؤال السادس :

$$f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}+a$$

$x-1\neq 0$ ① (P)

$$\boxed{x\neq 1}$$

② خط تقارب عمودي :

$$f(1)=\frac{4x+a(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{4+a\overset{0}{\cancel{(1-1)^2}}}{(1-1)^2}=\frac{4}{0}=\frac{\text{عدد}}{0}$$

خط تقارب عمودي

خط تقارب افقي :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{4\cdot\cancel{\infty}}{\cancel{(\infty-1)^2}}+a=a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{4(\cancel{-\infty})}{\cancel{(-\infty-1)^2}}+a=a$$

$$\boxed{y=a}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a},\ \boxed{x=1}$$: معادلة تقارب المطلوبة

www.IQsmart.co.il

$$f'(x)=\frac{4(x-1)^2-2(x-1)\cdot 4x}{(x-1)^4}=\frac{4(x-1)[x-1-2x]}{(x-1)^4}$$ ③

$$f'(x)=\frac{-4(x-1)(x+1)}{(x-1)^{4-3}}=\boxed{\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}}$$

$f'(x)=0$ ،

$$0=\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$x+1=0$$

$$\boxed{x=-1}\longrightarrow f(-1)=\frac{4(-1)}{\cancel{(-1-1)^2}}+a=\boxed{a-1}$$

	② $x<-1$	$x=-1$	③ $-1<x<1$	$x=1$	④ $x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	غير معرفة	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	غير معرفة (مقارب عمودي)	↘

$$f'(-2)=\frac{-4(-2+1)}{(-2+1)^3}=\frac{4}{(-3)^3}=\frac{+}{-}=-$$

$$f'(0)=\frac{-4(0+1)}{(0-1)^3}=\frac{-4}{-1}=\frac{-}{-}=+$$

$$f'(2)=\frac{-4(2+1)}{(2)^3}=\frac{-12}{(2)^3}=\frac{-}{+}=-$$

ومنه مينيمم: $\boxed{min(-1,a-1)}$

④ من الجدول أعلاه:

مجالات تصاعد الدالة: ↑ ; $\boxed{-1<x<1}$

مجالات تناقص الدالة: ↓ : $\boxed{x<-1}$ أو $\boxed{x>1}$

(ب) وجدنا أن معادلة خط التقارب الأفقي هو $f(x)=a$

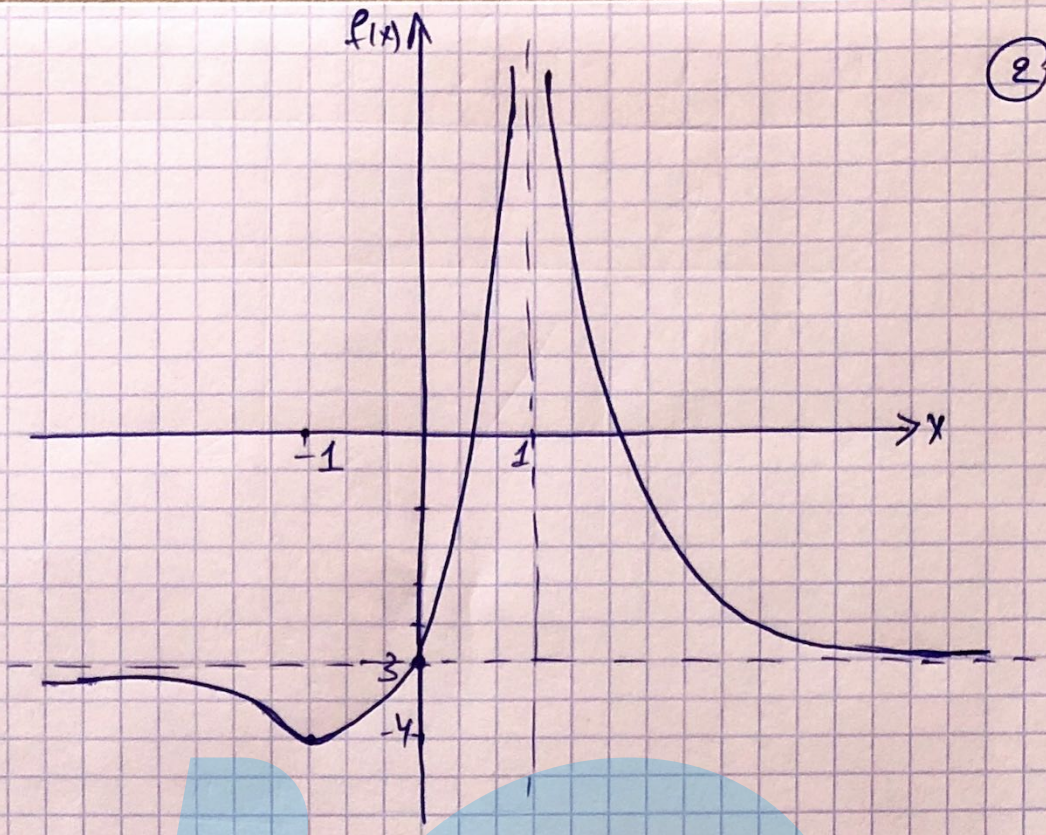
ومعطى أن خط التقارب للدالة $y=3$ أي $a=3$، $\boxed{a=3}$

(أ) ④ ① نعوّض $x_0=0$:

$$f(0)=\frac{4\cdot 0}{(0-1)^2}+(-3)=\underline{-3}$$

$\boxed{(0,-3)}$

www.iQsmart.co.il



(د) عدد الحلول لمعادلة $f(x)=k$ هو عدد نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة f مع المستقيم $y=k$.

الرسم أعلاه يقطع الرسم البياني للدالة f في نقطة واحدة فقط عندما $\boxed{k=-3}$ أو $\boxed{k=-4}$

www.IQsmart.co.il

السؤال السابع:

$$f(x)=\sqrt{49-x^2}$$

$49-x^2 \geq 0$ ① (P)

$49 \geq x^2$

$x^2-49=0$

$(x-7)(x+7)$

@ x^2 ... $a>0$ ... $a<0$

-7 7

$$-7 \leq x \leq 7$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{49-x^2}}=\boxed{\frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}}=0$$ ②

$$0=\frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}$$

$\boxed{x=0}$ → $f(0)=\sqrt{49-0}=7$

x	-7		$-7<x<0$	$x=0$	$0<x<7$		$x=7$
		①				①	
$f'(x)$	∄		+	0	−		∄
$f(x)$	∄	min	↗	max	↘	min	∄

$$f'(-1)=\frac{-(-1)}{\sqrt{49-1}}=\frac{1}{+}=+$$

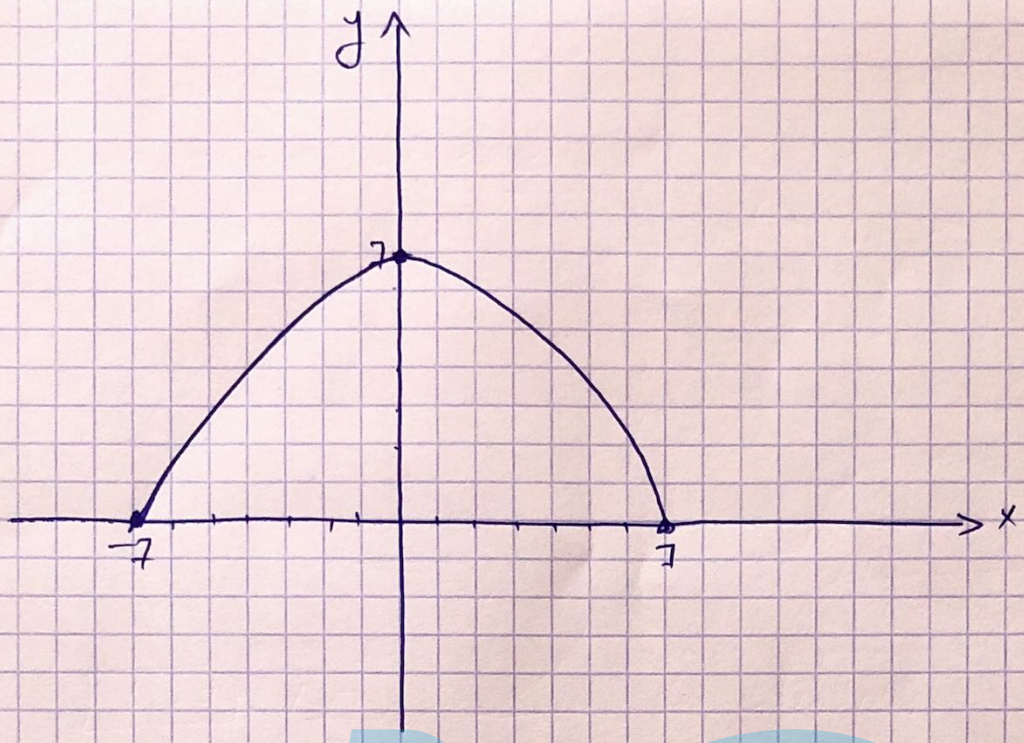
$$f(1)=\frac{-1}{\sqrt{49-1}}=\frac{-}{+}=-$$

$\boxed{\max(0,7)}$: הנקודות הקיצוניות הן

$\boxed{\min(-7,0)}$, $\boxed{\min(7,0)}$: ונקודות הקצה הן → $f(7)=\sqrt{49-(7)^2}=0$

$f(-7)=\sqrt{49-(-7)^2}=0$

www.iqsmart.co.il



(ب) ①

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{49-x^2}}$$

مجال تعريف $f'(x)$: $49-x^2>0$

أي نفس مجال تعريف الدالة $f(x)$ ولكن نفتح الأقواس.

أي: $\boxed{-7<x<7}$

من هنا: خطوط التقارب العمودية،

$$f(7) = \frac{-7}{\sqrt{49-49}} = \frac{-7}{0} = \frac{\text{عدد}}{0} \Rightarrow \text{خط تقارب}$$

$$f(-7) = \frac{-(-7)}{\sqrt{49-49}} = \frac{7}{0} = \frac{\text{عدد}}{0} \Rightarrow \text{خط تقارب}$$

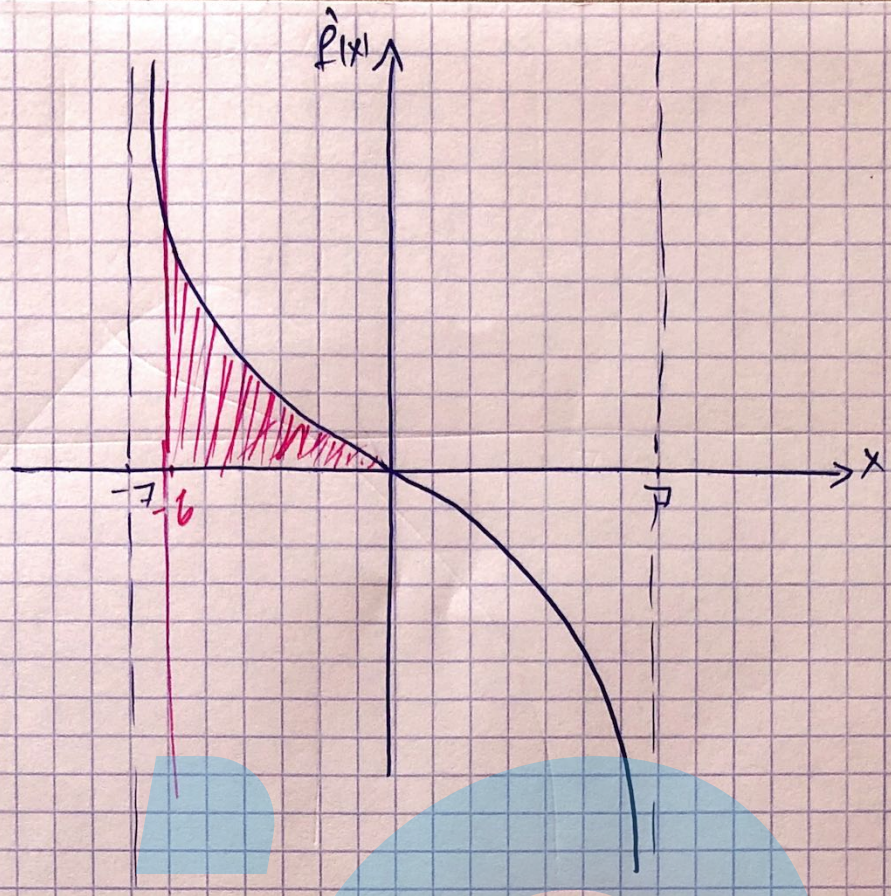
أي خطوط التقارب العمودية: $\boxed{x=7}$، $\boxed{x=-7}$

www.IQsmart.co.il

② من الجدول في البند (أ)② وجدنا أن:

$f(x)>0$: $\boxed{-7<x<7}$

$f(x)<0$ $\boxed{7<x<-7}$ ✗



ب) المساحة المظللة هي المساحة الملونة أعلاه :

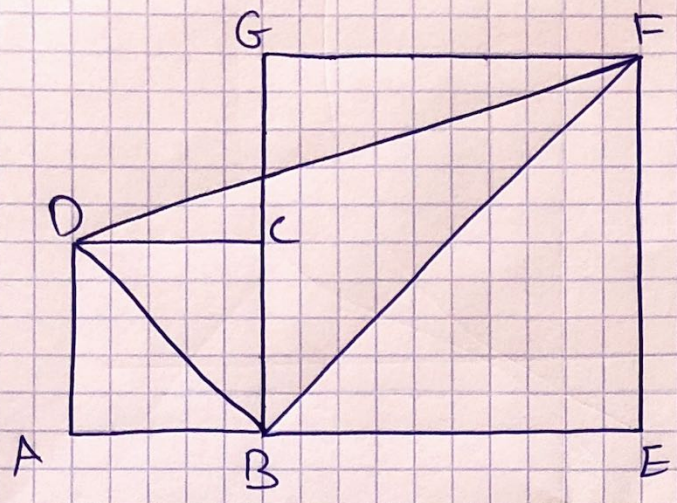
$$\int_{-6}^{0} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-6}^{0}$$

$$\Rightarrow f(0) - f(-6) = -7 - \left(\sqrt{49-(-6)^2}\right) = 7-\sqrt{13}$$

المساحة المظللة $\approx$ 3,39 وحدة مساحة

www.iQsmart.edu.ly

السؤال الثامن :



$DB+BF=a$

$\measuredangle DBC=45°$ (P)

و $\measuredangle FBG=45°$

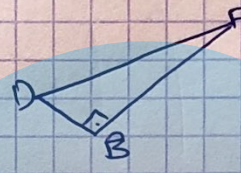
وذلك: لأن قطر المربع ينصف الزاوية التي يخرج منها.

بما هنا:

$\measuredangle DBF=45°+45°=90°$

أي $\triangle DBF$ قائم الزاوية:

$\triangle DBF$:



← بفيثاغورس $(DB)^2+(BF)^2=DF^2$

نفرض DB طوله x، بما هنا $BF=a-x$

نعوض في معادلة فيثاغورس:

طول $(DF)^2$

$g(x)=DF^2=x^2+(a-x)^2$

$g(x)=x^2+a^2-2ax+x^2$

$\boxed{g(x)=2x^2-2ax+a^2}$

$\boxed{g'(x)=4x-2a}=0$

$\div 2$ $0=4x-2a$

$0=2x-a$

$a=2x$

$\boxed{x=\frac{a}{2}}$

← بالنقطة الثانية نجد أن $x=\frac{a}{2}$ يعطينا أقصر طول للقطعة DF (أي min لدالة $g(x)$):

$g''(x)=4>0$

أي $g''(x)$ موجبة لكل x

بالتالي $x=\frac{a}{2}$ نقطة min، بما هنا $y=\frac{a}{2}$ يعطينا أقصر طول ممكن لـ DF

www.IQsmart.co.il

(٥) النسبة بين القطرين تساوي النسبة بين ضلع المربع ABCD وضلع المربع BGFE وذلك لأن المربعات هي أشكال متشابهة

ومنها:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BF} = \frac{\sqrt{5}a}{\frac{(a-\sqrt{5}a)}{\sqrt{5}a}} = 1$$

أي أن النسبة:

$$\boxed{\frac{AB}{BE} = 1}$$

www.IQsmart.co.il