حل نموذج بجروت

(806)-581

موعد (ب)-صيف 2018

طاقم الرياضيات

www.IQsmart.co.il

معهد IQ

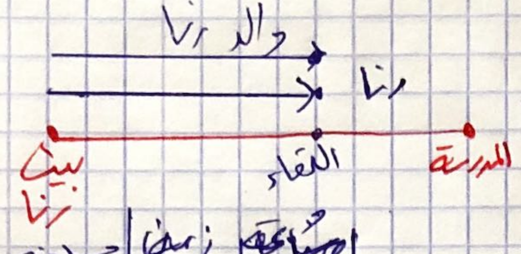
سؤال 1

بحسب المعطيات:-

* البعد بين بيت رنا والمدرسة 500 متر.
* سرعة والد رنا هي 2.5 متر/ثانية

وبالتالي سرعته بوحدات متر/دقيقة

هي $2.5 \cdot 60 = 150$ م/دقيقة



مسافة	زمن	سرعة	
$V\cdot T$	T	V م/د	رنا
$150(T-3)$	$(T-3)$	150	والد رنا

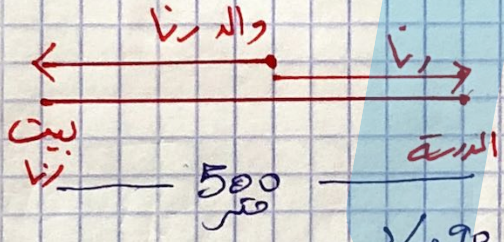
حتى الالتقاء. نفرض زمن رنا T دقائق

اذاً زمن والد رنا $(T-3)$ دقائق

حتى الالتقاء قطع الاثنان نفس المسافة لذلك يتحقق:-

$$\boxed{* \quad V\cdot T = 150(T-3)}$$

بعد الالتقاء:



سرعة رنا هي نفسها V

مسافة رنا $500 - V\cdot T$

سرعة والد رنا 1.5 م/ث أي: $1.5 \cdot 60 = 90$ م/د

مسافة والد رنا هي $V\cdot T$

$\frac{500-VT}{V}$ = زمن رنا = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

سرعة	زمن	مسافة	
V	$\frac{500-VT}{V}$	$500-V\cdot T$	رنا
90	$\frac{VT}{90}$	$V\cdot T$	والد رنا

زمن والد رنا = $\frac{VT}{90}$

زمن سير الاثنين متساوي لذلك يتحقق

$$\boxed{** \quad \frac{500-VT}{V} = \frac{VT}{90}} \Longrightarrow \boxed{VT = \frac{90(500-VT)}{V}}$$ ومنه

اذاً حصلنا على معادلتين بمجهولين.

$* \quad VT = 150(T-3)$

$** \quad VT = \frac{(500-VT)\cdot 90}{V}$

$\Longrightarrow$ نقسم $**$ على $*$: $** \div * \Longrightarrow \frac{VT}{VT} = \frac{\frac{(500-VT)\cdot 90}{V}}{150(T-3)}$

$$1 = \frac{9\cancel{0}(500-VT)}{15\cancel{0}\cdot V(T-3)} \Longrightarrow \overset{5}{\cancel{15}}V(T-3) = \overset{3}{\cancel{9}}(500-VT)$$

$$5V(T-3)=3(500-VT) \Rightarrow 5VT-15V=1500-3VT$$

$$\Rightarrow 5VT+3VT=1500+15V \Rightarrow 8VT=1500+15V$$

$$\boxed{VT=\frac{1500+15V}{8}}$$

نعوض مكان VT في المعادلة * نحصل على

$$VT=150(T-3) \Rightarrow \frac{1500+15V}{8}=150(T-3) \quad /\cdot 8$$

$$1500+15V=1200(T-3) \Rightarrow 1500+15V=1200T-3600$$

$$15V=1200T-3600-1500 \Rightarrow 15V=1200T-5100 \quad /:15$$

$$\Rightarrow \boxed{V=80T-340}$$

نعوض مكان V في المعادلة $*\ VT=150(T-3)$

$$(80T-340)\cdot T=150(T-3) \Rightarrow 80T^2-340T=150T-450$$

$$\Rightarrow 80T^2-340T-150T+450=0$$

$$\Rightarrow 80T^2-590T+450=0$$

نقسم المعادلة على 10:

$$8T^2-59T+45$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب القانون, نحصل على:

$T_1=5$ $\xrightarrow[\text{ونجد } V]{\text{نعوض}}$ $V_1=80T-340=60$

$T_2=1\frac{1}{2}$ $\quad V_2=80T-340=-260$

غير ملائم لأن V موجب يعبر عن سرعة

إذاً: سرعة رنا $\boxed{V=60 \text{ م/د}}$

ب. وجدنا أن $T=5$ وهو الزمن حتى التقى والد رنا مع رنا

بعدها بمدة دقيقتين ومن ثم تابعت رنا سيرها

واحتاجت لـ $\frac{500-VT}{V} \leftarrow \frac{500-\overset{300}{60\cdot 5}}{60}=3\frac{1}{3}$ دقيقة

والمجموع: $3\frac{1}{3}+2+5=\boxed{10\frac{1}{2} \text{ دقيقة}}$

سؤال 9

معطى ان $a_{n+1}=-\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1=-\frac{1}{c}$, $c>0$

أ- لكي نبرهن ان متوالية الحدود التي في الاماكن الفرديه ومتوالية الحدود التي في الاماكن الزوجيه هي متواليات هندسيه نبرهن ان $\frac{a_{n+2}}{a_n}=q$

وعندها اذا كان n فردي فمتوالية الحدود في الاماكن الفرديه هي هندسيه واذا كان n زوجي ستكون متوالية الحدود في الاماكن الزوجيه هندسية ايضا.

$$a_{n+2}=-\frac{c^{(n+1)-2}}{a_{n+1}}=\frac{-c^{n-1}}{\frac{-c^{n-2}}{a_n}}=\frac{c^{n-1}\cdot a_n}{c^{n-2}}$$

$$\rightarrow a_{n+2}=c^{(n-1)-(n-2)}\cdot a_n \rightarrow \boxed{a_{n+2}=c^1\cdot a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{c^1\cdot \cancel{a_n}}{\cancel{a_n}}=c$$

اذا متواليه الحدود في الاماكن الفرديه ومتوالية الحدود في الاماكن الزوجيه بالمتواليه a_n هي متواليات هندسيه وخارجها c.

ب. 1.

$a_2=\frac{-c^{2-2}}{a_1}=\frac{-c^0}{-\frac{1}{c}}=c^{-1}\cdot c^1=c^0=1$

$a_2=1$

$a_4=1\cdot c=c$

$a_6=c\cdot c=c^2$

$a_1=-\frac{1}{c}$

$a_3=-\frac{1}{c}\cdot c=-1$

$a_5=-1\cdot c=-c$

$a_7=-c\cdot c$

$a_7=-c^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{اول 7 حدود هي:} \\ -\frac{1}{c},\ 1,\ -1,\ c,\ -c,\ c^2 \\ -c^3\end{array}}$$

3.ب

في اول $(2n-1)$ عدد من المتوالية a_n

هنالك n عدد في الاماكن الفردية

و $n-1$ عدد في الاماكن الزوجية

مجموع الحدود في الاماكن الزوجية هو:

$$S_{n-1} = a_2 \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{c^{n-1}-1}{c-1} = \frac{c^{n-1}-1}{c-1}$$

مجموع الحدود في الاماكن الفردية هو:

$$S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{1}{c} \cdot \frac{c^n-1}{c-1}$$

$$\underset{\text{المتوالية } a_n}{S_{2n-1}} = S_{\text{فردية}} + S_{\text{زوجية}} = \frac{1}{c}\cdot\frac{c^n-1}{c-1} + \frac{c^{n-1}-1}{c-1}$$

$$= \frac{1}{c-1}\left[\frac{c^n-1}{c} + c^{n-1}-1\right] = \frac{1}{c-1}\left[\frac{1-c^n+c^{n-1}\cdot c-c}{c}\right]$$

$$= \frac{1}{c-1}\left[\frac{1-\cancel{c^n}+\cancel{c^n}-c}{c}\right] = \frac{1}{\cancel{c-1}} \cdot \frac{\overset{-1}{\cancel{1-c}}}{c} = -\frac{1}{c}$$

اذاً

$$\boxed{\underset{\text{المتوالية } a_n}{S_{2n-1}} = -\frac{1}{c}}$$

لا يتعلق بـ n

ج.

$$b_n = \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-2}{a_n \cdot \frac{-c^{n-2}}{a_n}} = \frac{-2}{-c^{n-2}}$$

$$b_{n+1} = \frac{-2}{-c^{n+1-2}} = \frac{-2}{-c^{n-1}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\cancel{-}2}{-c^{n-1}}}{\frac{\cancel{-}2}{-c^{n-2}}} = \frac{\cancel{2}}{-c^{n-1}} \cdot \frac{-c^{n-2}}{\cancel{2}} = \frac{c^{n-2}}{c^{n-1}} = \frac{1}{c}$$

اذاً b_n هندسية بـ $\frac{1}{c}$

4

$$b_1 = \frac{-2}{a_1 \cdot a_2} = \frac{-2}{-\frac{1}{c} \cdot 1} = \frac{-2}{-\frac{1}{c}} = +2c > 0$$ (2. ב)

اذاً $b_1 > 0$ وبالتالي لكي تكون المتوالية b_n تنازلية

يجب ان يتحقق ان :-

$$0 < q_{b_n} < 1$$!-

أساس المتوالية b_n

$$q_{b_n} = \frac{1}{c} \Rightarrow 0 < \frac{1}{c} < 1 \xrightarrow{\cdot c} 0 < 1 < c$$

أي $\boxed{c > 1}$ هو المجال الذي يحقق أن المتوالية b_n تنازلية

$\boxed{3. ב}$ بما ان المتوالية b_n لا نهائية تنازلية لذلك هي متقاربة

وبالتالي مجموعها يحقق :-

$$S_{b_n} = \frac{b_1}{1 - q_{b_n}} = \frac{2c}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{2c}{\frac{c-1}{c}} = 2c \cdot \frac{c}{c-1}$$

$$\boxed{S_{b_n} = \frac{2c^2}{c-1}}$$

سؤال 3

أ.1 بحسب المعطيات نفهم:

* الامتحان يشمل 5 أسئلة ولكل سؤال 4 إجابات مقترحة
* احتمال الإجابة بشكل صحيح على سؤال هو $\frac{1}{4}$ واحتمال الإجابة خطأ $\frac{3}{4}$
* شادي أجاب على سؤالين من بين الخمسة بشكل صحيح ولكل سؤال 20 درجة لذلك سيحصل على 40 درجة عليها.
* علامة النجاح 60 على الأقل لذلك لكي يحصل شادي على 60 درجة يجب عليه ان يجيب بشكل صحيح على سؤال واحد من بين الثلاثة المتبقية.

$$P\left(\text{الحصول على 60 بالضبط}\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = \boxed{\frac{27}{64}}$$

أ.2 الاحتمال أن ينجح شادي بالامتحان هو أن يجيب على الأقل على سؤال واحد من بين الثلاثة المتبقية والتي أجاب عليها بشكل عشوائي

$$P\left(\text{النجاح}\right) = 1 - P\left(\text{أجاب خطأ على الأسئلة الثلاثة}\right)$$

$$P\left(\text{النجاح}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1-\frac{27}{64} = \boxed{\frac{37}{64}}$$

ب. بحسب المعطيات أجاب رامي على سؤالين من الأسئلة الـ5 بشكل صحيح وفي الأسئلة الثلاثة المتبقية عرف رامي أن إجابة واحدة في كل واحدة منها غير صحيحة وبالتالي تبقى أمامه 3 إجابات، من بينها واحدة صحيحة، اذًا الاحتمال ان يجيب بشكل صحيح هو $\frac{1}{3}$ وان يجيب خطأ $\frac{2}{3}$

$$P\left(\text{60 بالضبط}\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{9}}$$

(وهو الاحتمال ان يجيب على سؤال واحد من 3 بشكل صحيح)

ج. لحسب المعطيات: هيام عرفت الإجابة الصحيحة لثلاثة أسئلة من بين الأسئلة الخمسة. وبالتالي ستحصل على 60 درجة على هذه الأسئلة.

في السؤالين المتبقيين عرفت هيام أن K إجابات خطأ وبالتالي عدد الإجابات التي عليها أن تختار من بينها الإجابة الصحيحة بشكل عشوائي هو $4-K$

واحتمال اختيار الإجابة الصحيحة هو $\frac{1}{4-K}$ — واضح أن $K<4$

وبالتالي احتمال اختيار إجابة خطأ هو $1-\frac{1}{4-K}$

$$\frac{4-K}{4-K}-\frac{1}{4-K}=\frac{4-K-1}{4-K}=\boxed{\frac{3-K}{4-K}}$$

معلوم أن احتمال حصول هيام على علامة 60، مساوٍ للاحتمال أن تحصل على 100.

الاحتمال أن تحصل هيام على 60 هو أن تجيب على الأسئلة المتبقية (سؤالين) بشكل خطأ:

$$P\left(\frac{\text{علامة}}{60}\right)=\left(\frac{3-K}{4-K}\right)^2$$

الاحتمال أن تحصل هيام على 100 هو أن تجيب على السؤالين المتبقيين بشكل صحيح:

$$P\left(\frac{\text{علامة}}{100}\right)=\left(\frac{1}{4-K}\right)^2$$

والتحقق:

$$\left(\frac{3-K}{4-K}\right)^2=\left(\frac{1}{4-K}\right)^2 \Rightarrow \frac{(3-K)^2}{\cancel{(4-K)^2}}=\frac{1^2}{\cancel{(4-K)^2}}$$

$$(3-K)^2=1$$

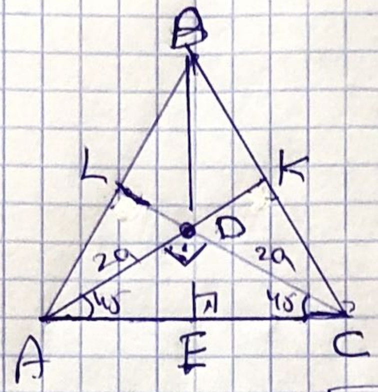
$3-K=1$ أو $3-K=-1$

$\boxed{2=K}$ ✓ أو $\boxed{4=K}$

وكان $0<K<4$ لذلك غير ملائمة

إذن $\boxed{K=2}$

سؤال 4



بحسب المعطيات ABC متساوي الساقين

منه $BC=AB$. AK و CL متوسطات على الساقين.

في المثلث المتساوي الساقين, المتوسطات النازلة على الساقين متساوية $\boxed{CL=AK}$

نرسم المتوسط على القاعدة BE.

BE يمر بـ D لان المتوسطات في المثلث تلتقي في نقطة واحدة و BE عمودي على القاعدة AC لان المتوسط في المثلث المتساوي الساقين عمودي على القاعدة

بما أن $CL \perp AK$ اذاً $\measuredangle D=90^\circ$.

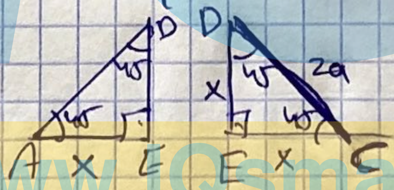
نفرض ان $a=DK$ اذاً $AD=2a$ بحسب نظرية تقاطع المتوسطات

وينتج ايضاً ان $LD=a$ و $DC=2a$

المثلث ADC قائم الزاوية ومتساوي الساقين

لذلك $\measuredangle DCA=\measuredangle DAC=\frac{180-90}{2}=45^\circ$

ومن هذا نستنتج ان كل واحد من المثلثات DEC و DEA هو مثلث متساوي



وبحسب فيثاغورس نتحقق:

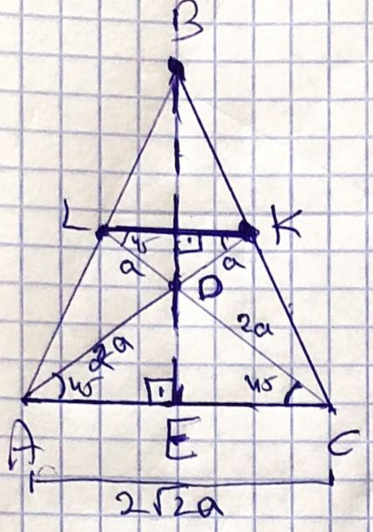
$$x^2+x^2=(2a)^2 \Longrightarrow 2x^2=4a^2 \Longrightarrow \boxed{x=\sqrt{2}a}$$

اذاً $\boxed{DE=a\sqrt{2}}$, $BD=2DE$ بحسب نظرية المتوسطات في المثلث

لذلك $BD=2\cdot a\cdot\sqrt{2}$ و $AC=\sqrt{2}a+\sqrt{2}a \Leftarrow AC=2\sqrt{2}a$

اذاً نتحقق: $\boxed{AC=BD=2\sqrt{2}a}$

وهو المطلوب (م).



9) L و K هي منتصفات الأضلاع ولذلك

LK هو قاعدة وسطى في المثلث

اذاً: $LK \parallel AC$ و $LK = \frac{1}{2}AC$

$AC = 2\sqrt{2}a$ لذلك $\boxed{LK = \sqrt{2}a}$

الشكل الرباعي BLDK هو دالتون

$DL = DK$ و $AL = AK$

$$S_{BLDK} = \frac{BD \cdot LK}{2} \quad \left(\frac{\text{حاصل ضرب الأقطار}}{2}\right)$$

$BD = 2DE = 2\sqrt{2}a$ حسب نظرية التقاء المتوسطات بالمثلث

$LK = \sqrt{2}a$

اذاً: $$S_{BLDK} = \frac{2\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2}a}{2} = 2a^2$$

نجد مساحة المثلث ABC:

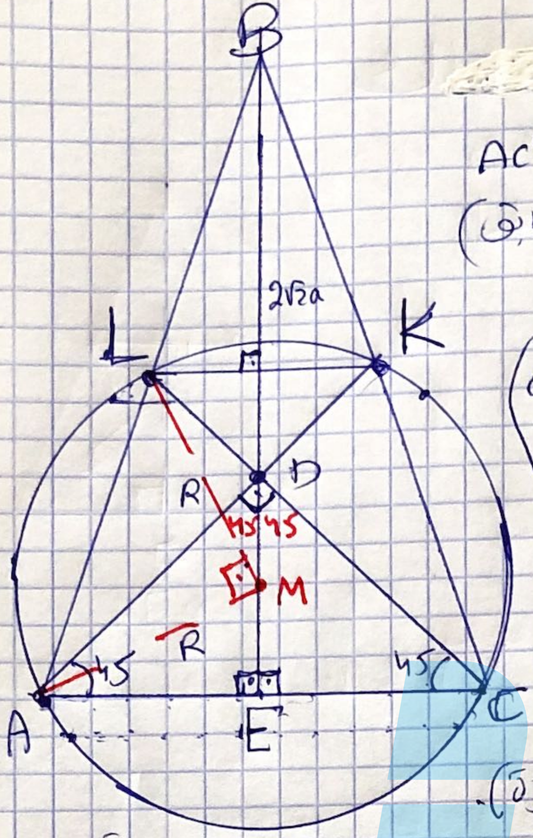
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BE}{2}$$

$AC = 2\sqrt{2}a$

$BE = DB + DE = 2\sqrt{2}a + \sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a$

اذاً: $$S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{2}a \cdot 3\sqrt{2}a}{2} = 6a^2$$

$$\boxed{\frac{S_{BLDK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2a^2}{6a^2} = \frac{1}{3}}$$



1. أ

M هي مركز الدائرة الحاصرة للشكل الرباعي (شبه المنحرف) ACKL

(من البند السابق) $\measuredangle DCE = 45°$

$\measuredangle LMA = 2\measuredangle DCE = 2\cdot 45 = 90$

(محيطية ومركزية تقابلان نفس القوس $\overset{\frown}{LA}$)

2. أ

$\frac{AM}{AD} = ?$

$AM = LM = R$ (انصاف اقطار في الدائرة).

$\measuredangle AML = 90$, اذاً بحسب فيثاغورس في $\triangle AML$ يتحقق: -

$$AL^2 = (LM)^2 + (AM)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow \boxed{AL = \sqrt{2}R}$$

$AL = \frac{1}{2}AB \Longrightarrow \triangle AEB : AB^2 = BE^2 + AE^2$

حسب فيثاغورس

$$\Rightarrow AB^2 = (3\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 = 18a^2 + 2a^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 20a^2 \Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{20}\cdot a}$$

$$\Rightarrow AL = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{20}a}{2}$$

في $\triangle ALM$: $AL = \sqrt{2}R \Leftarrow \frac{\sqrt{20}a}{2} = \sqrt{2}R \Leftarrow \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}a = R$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{20}a}{2\sqrt{2}} = R \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{2}}a = R}$$

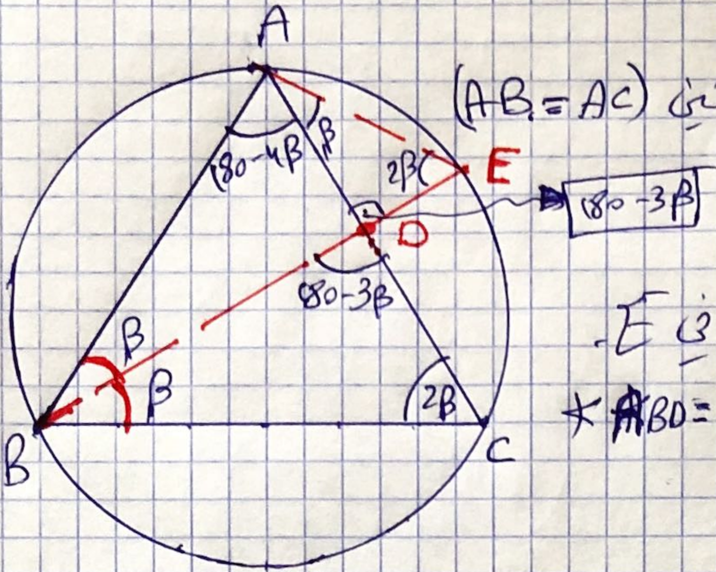
اذاً: في $\triangle DAE$ $AE = DE = a\cdot\sqrt{2}$ وحسب فيثاغورس يتحقق:

$$AD^2 = (a\cdot\sqrt{2})^2 + (a\cdot\sqrt{2})^2 = AD^2 = 4a^2 \Rightarrow \boxed{AD = 2a}$$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{R}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{2}}\cdot \cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{20}}{4\cdot\sqrt{2}}}$$

سؤال 5

بحسب المعطيات :-



ABC مثلث متساوي الساقين $(AB=AC)$

محصور داخل دائرة .

BD منصف $\measuredangle ABC$.

امتداد BD يقطع الدائرة في E.

$\measuredangle ABD=\measuredangle DBC=\beta \Leftarrow \measuredangle ABC=2\beta=\measuredangle C$

أ. $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=?$

نعبر عن مساحة كل واحد من المثلثين بدلالة β :-

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\cdot \sin\measuredangle A$$

$\measuredangle A=180-2\beta-2\beta=180-4\beta$ مجموع زوايا المثلث 180.

في ΔABC يتحقق:

$$\frac{AB}{\sin 2\beta}=2R \Longrightarrow AB=2R\cdot\sin 2\beta$$

وعلما أن $AB=AC$

$$\boxed{AB=AC=2R\sin 2\beta}$$

وبالتالي:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\cdot\sin\measuredangle A=\frac{(2R\cdot\sin 2\beta)^2\cdot(\sin(180-4\beta))}{2}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4R^2\cdot\sin^2 2\beta\cdot\sin 4\beta}{2} \longleftarrow \boxed{\sin(180-\alpha)=\sin\alpha}$$

$$\boxed{S_{\triangle ABC}=2R^2\cdot\sin^2 2\beta\cdot\sin 4\beta}$$

نعبر عن مساحة ΔADE :-

$\measuredangle E=\measuredangle C=2\beta$ محيطية تقابل نفس القوس AB

$\measuredangle BDC=180-\beta-2\beta=180-3\beta=\measuredangle ADE$ متقابلة بالرأس

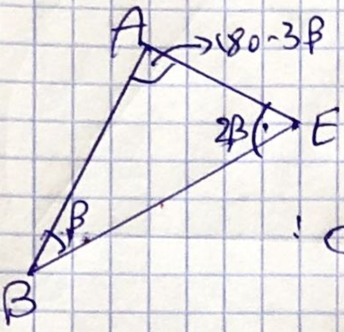
$\measuredangle DAE=180-(180-3\beta+2\beta)=\beta$

$$S_{\triangle ADE}=\frac{AD\cdot AE}{2}\sin\measuredangle DAE$$

في ΔADE يتحقق

$$(*) \quad \frac{AD}{\sin 2\beta} = \frac{AE}{\sin(180-3\beta)}$$

المثلث ABE محصور داخل نفس الدائرة ولذلك



يتحقق

$$\frac{AE}{\sin\beta} = 2R \longrightarrow \boxed{AE = 2R\sin\beta}$$

نعوض في (*) ، $AE = 2R\sin\beta$ نحصل على:

$$\frac{AD}{\sin 2\beta} = \frac{2R\sin\beta}{\sin(180-3\beta)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{AD = \frac{2R\sin\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin 3\beta}}$$

$$S_{\Delta ADE} = \frac{AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE}{2} = \frac{\overbrace{\frac{2R\sin\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin 3\beta}}^{AD} \cdot \overbrace{2R\sin\beta}^{AE} \cdot \sin\beta}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ADE} = \frac{2R^2 \sin^3\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin 3\beta}}$$

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\cancel{2R^2} \cdot \sin^2 2\beta \cdot \sin 4\beta}{\frac{\cancel{2R^2} \sin^3\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin 3\beta}} = \frac{\sin^2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot \sin 3\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin^2\beta \cdot \sin^3\beta}$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\sin 4\beta \cdot \sin 3\beta \cdot \sin 2\beta}{\sin^3\beta}}$$

ب. معطى لنا $BE = R$

في المثلث ABE:

$$\frac{\overbrace{BE}^{R}}{\underbrace{\sin(180-3\beta)}_{\sin 3\beta}} = 2R \Longrightarrow \frac{\cancel{R}}{\sin 3\beta} = 2\cancel{R}$$

$$\frac{1}{\sin 3\beta} = 2 \longrightarrow \sin 3\beta = \frac{1}{2} \longrightarrow 3\beta = 30 + 360k$$

$$\Longrightarrow \beta = 10 + 120k$$

$k=0 \quad \beta = 10$ ✓

$k=1 \longrightarrow \beta = 130$ غير ملائم

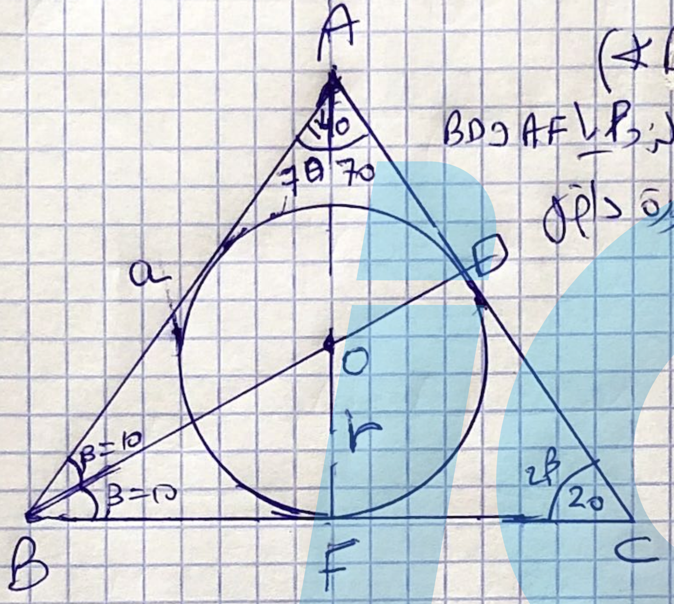
في المثلث ABC أيضاً الزاوية $4\beta < 180 \longrightarrow \boxed{\beta < 45^\circ}$

بحسب البند السابق

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{\sin 2\beta \cdot \sin 3\beta \cdot \sin 4\beta}{\sin^3\beta}$$

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{ADE}} = \frac{\sin 20 \cdot \sin 30 \cdot \sin 40}{\sin^3 10} = \boxed{20.99}$$

ج. * مركز الدائرة المحصورة داخل مثلث هي ملتقى منصفات الزوايا.



AF هو منصف $(\measuredangle BAC = 140)$

O هي تقاطع منصفات الزوايا AF و BD

وهي مركز الدائرة المحصورة داخل المثلث ABC.

$AB = a$.

في ABC نتحقق:

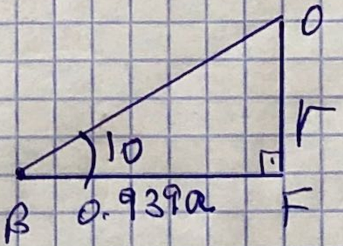
$$\frac{BC}{\sin 140} = \frac{\overset{AB}{a}}{\sin 20}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{a \cdot \sin 140}{\sin 20}$$

منصف الزاوية ينصف القاعدة في المثلث المتساوي الساقين

$$BF = \frac{BC}{2} = \frac{a \sin 140}{2 \sin 20} = \boxed{0.939a}$$

في المثلث OBF نتحقق:

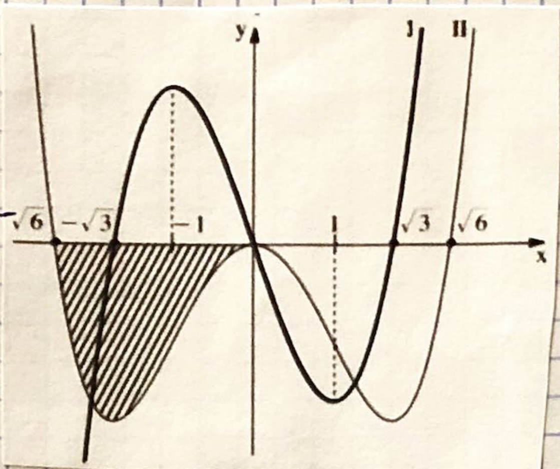


$$tg\,10 = \frac{r}{BF} = \frac{r}{0.939a}$$

$$\Rightarrow r = 0.939a \cdot tg\,10$$

$$\boxed{r = 0.16569\,a}$$

سؤال 6



أ. لحسب المعطيات الرسمان هما
رسمان لـ $f'(x)$ و $f''(x)$
العلاقة بين $f'(x)$ و $f''(x)$
هي نفس العلاقة بين $f(x)$ و $f'(x)$
اي يمكننا التوجه لـ $f'(x)$ على انها
الدالة ولـ $f''(x)$ على انها المشتقة
بما أنّ رسم II تنازلي حتى $-\sqrt{3}$ - اي لكل $x<-\sqrt{3}$ ($\min x=-\sqrt{3}$)
ومن ثم في المجال $-\sqrt{3}<x<0$ تصاعدي
لذلك مشتقة الدالة في رسم II يجب ان تكون سالبة لكل $x<-\sqrt{3}$
و $x=-\sqrt{3}$ نقطة صفرية وفي المجال $-\sqrt{3}<x<0$ موجبة
وهذا ملائم لرسم I. لذلك:

$$\boxed{I \to f''(x) \quad , \quad II \to f'(x)}$$

ب(1) لحسب رسم II ← $f'(x)$، فإنّه لـ $f'(x)$ هنالك 3 نقاط
صفرية: $x=-\sqrt{6}$, $x=0$, $x=\sqrt{6}$
نبني جدول فحص النقاط

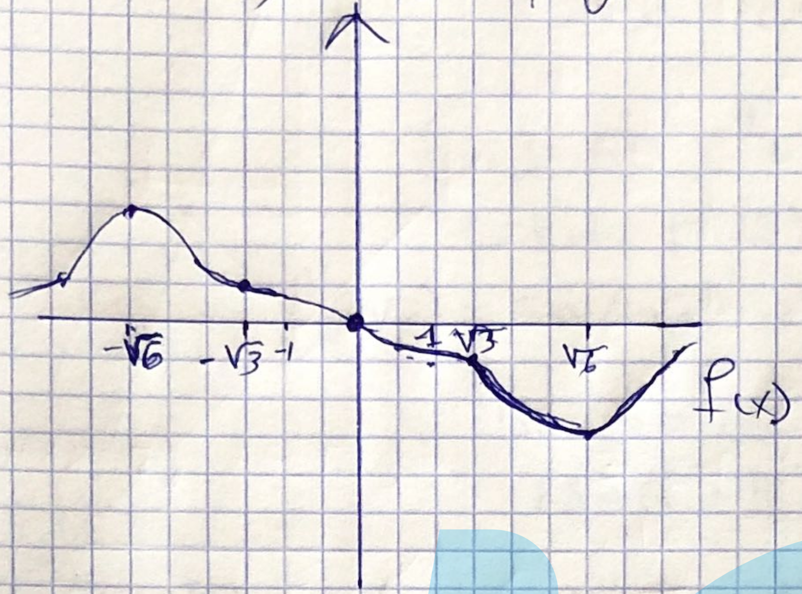
X	$\longleftrightarrow$	$-\sqrt{6}$	$\longleftrightarrow$	0	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{6}$	$\longleftrightarrow$
f'	+	0	−	0	−	0	+
	$\nearrow$	max	$\searrow$	التواء	$\searrow$	min	$\nearrow$

للدالة $f(x)$
$x=-\sqrt{6}$ مكسيمام
$x=\sqrt{6}$ مينيمام
اي نقطتان قصوى.

ب.2 نقطة الالتواء للدالة هي نقطة قصوى للمشتقة.
وبحسب رسم $f'(x)$ (II) هنالك 3 نقاط قصوى
وهي نقاط التواء للدالة $f(x)$: $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$

ج ميل المماس لـ $f'(x)$ في كل نقطة عليها هو $f''(x)$
واصغر ميل لـ $f'(x)$ في المجال $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ هو اصغر قيمة لـ $f''(x)$
في نفس المجال. وهذا يكون بحسب رسم I في $\boxed{x=1}$

د. الدالة $f(x)$ فردية لذلك تحقق $f(-x)=-f(x)$
ورسمها يجب ان يكون متماثل بالنسبة لـ $(0,0)$
ويجب ان تمر بـ $(0,0)$.



نقاط الدالة القصوى:

$x=+\sqrt{6}$ مينيمام

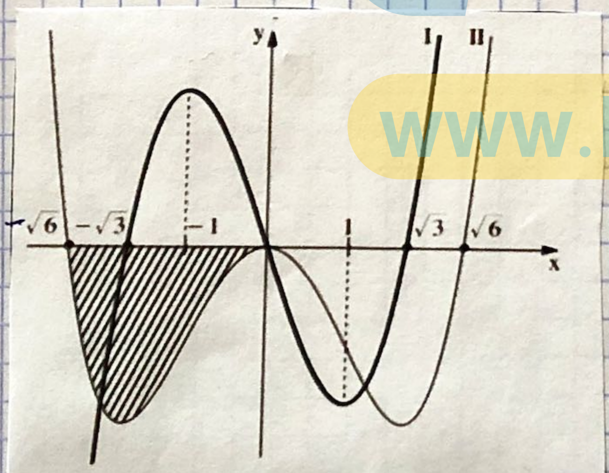
$x=-\sqrt{6}$ ماكسيمام

نقاط التواء الدالة:

$x=\sqrt{3}$ / $x=0$ / $x=-\sqrt{3}$

ملاحظة:

ليس هنالك معلومات بخصوص نقاط تقاطع الدالة مع المحور x وبخصوص خطوط التقارب الافقية ايضا ليس هنالك معلومات وبالتالي يمكن رسم الدالة في $x\to+\infty$ او $x\to-\infty$ على انها تصاعدية/تنازلية
$x\to-\infty$ $x\to\infty$
وعندها ستقطع المحور x ...



هـ. نقطة النهاية العظمى للدالة هي $x=-\sqrt{6}$ وتحقق:
$f(-\sqrt{6})=t$

المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة وهذه المساحة هي:

$$S=\left|\int_{-\sqrt{6}}^{0} f(x)\,dx\right| = \left|\left[f(x)\right]_{-\sqrt{6}}^{0}\right|$$

القيمة مطلقة لان $f(x)$ سالبة في المجال $-\sqrt{6}<x<0$

$$\Longrightarrow \left|f(0)-f(-\sqrt{6})\right| = |0-t| = t$$

اذا المساحة المطلوبة (المخططة) هي $\boxed{t}$

** انتبه t موجب لانه بحسب الرسم $f(-\sqrt{6})>0$.

و

$$f(x)=ax^5+bx^3+c$$

بما ان الدالة تمر ب $(0,0)$ لذلك $\boxed{C=0}$

$$f'(x)=5ax^4+3bx^2$$

بما انه يتحقق ان $f'(-\sqrt{6})=0$ لذلك

$$f'(-\sqrt{6})=5a(-\sqrt{6})^4+3b(-\sqrt{6})^2=0$$

$$5a\cdot 36+3\cdot b\cdot 6=0$$

$$180a+18b=0$$

$$180a=-18b \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{-18}{180}=-\frac{1}{10}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}}$$

سؤال 7

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

أ. مجال تعريف الدالة $x \neq 0$

معطى أن $x \geq \frac{2}{7}$

ب. تقاطع مع المحاور

مع y لا يوجد $(x \geq \frac{2}{7})$.

مع $x \Leftarrow f(x)=0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{x}=0$

$$\frac{\pi}{x} = \pi K \Rightarrow \frac{1}{x} = K \Rightarrow x = \frac{1}{K} \geq \frac{2}{7}$$

$K>0$ بالضرورة لأن $x > \frac{2}{7} > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{K} \geq \frac{2}{7} \Rightarrow K \leq \frac{7}{2} = 3.5$$

اذاً $K>0$ دائماً $0 < K \leq 3.5$

وبما أن K عدد صحيح يعبّر عن دوران لذلك

$K = 1,2,3$

$$x = \frac{1}{K} \Rightarrow \boxed{x=1} \quad \boxed{x=\frac{1}{2}} \quad \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

وبالتالي التقاطع مع x هو: $(\frac{1}{3},0)$ $(\frac{1}{2},0)$ $(1,0)$

ج. النقاط القصوى تحقق $f'(x)=0$

$$f'(x) = \cos\frac{\pi}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{x}\right)' = \cos\frac{\pi}{x} \cdot \left[\frac{-\pi}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{-\pi}{x^2} \cdot \cos\frac{\pi}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi K \Rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{x} = \frac{\cancel{\pi}+2\pi K}{2} = \frac{\cancel{\pi}(1+2K)}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{1+2K}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{1+\cancel{2}k}$$

$k=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \geq \frac{2}{7}$ ✓ $\qquad k=2 \rightarrow \boxed{x=\frac{2}{5}} \geq \frac{2}{7}$ ✓

$k=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}} \geq \frac{2}{7}$ ✓ $\qquad k=3 \rightarrow \boxed{x=\frac{2}{7}} \geq \frac{2}{7}$ ✓

$k=4 \rightarrow x = \frac{2}{9} \ngeq \frac{2}{7}$ غير ملائم

اذاً هنالك 4 نقاط بيك 6 نقط حسب جدول

x	$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$		2	
f'	0	+	0	−	0	+	0	−
f	−1	↗	max 1	↘	−1	↗	1 max	↘

$f\left(\frac{2}{7}\right) = \sin\frac{7\pi}{2} = -1 \quad // \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \sin\frac{3}{2}\pi = -1 \quad // \quad f(2) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

إذاً:

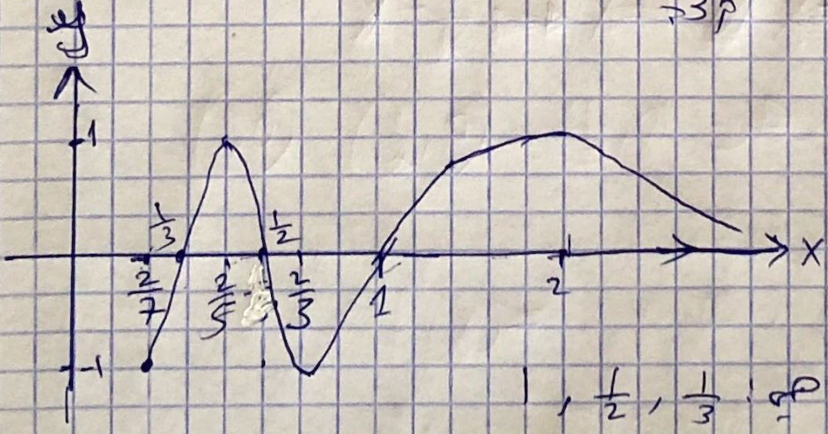
נקודות מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$ // $(2, 1)$

נקודות מינימום: $\left(\frac{2}{7}, -1\right)$ // $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$

طرف

קצה

هـ.



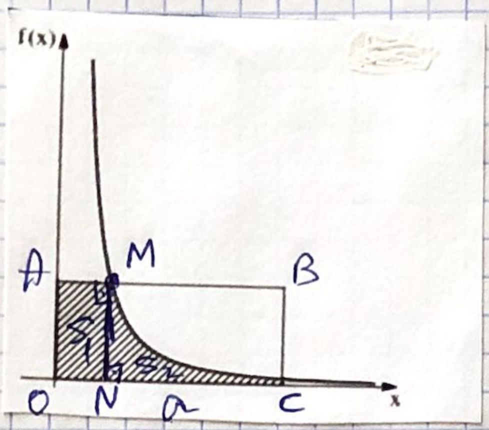
و. نقاط التقاطع مع x هي: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1

البعد بين 1 و $\frac{1}{2}$ هو $\frac{1}{2}$ وحدة

البعد بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هو $\frac{1}{6}$ وحدة $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\right)$

لذلك كلما اقتربنا من الصفر البعد يصغر بين نقطتي تقاطع متجاورتين. الادعاء الصحيح (i)

سؤال 8



$x>0 \qquad f(x)=\frac{1}{x^2}$

$OC=a\geq\frac{1}{4}$

مساحة المستطيل = 4

اذاً $OA\cdot a=4 \leftarrow \boxed{OA=\frac{4}{a}}$

واحداثيات $C:(a,0)$ $A:\left(0,\frac{4}{a}\right)$

المساحة المخططة عبارة عن مساحتين

S_1+S_2

مساحة المستطيل AMNO ⟵ S_1 ، المساحة بين الدالة والمحور X من N حتى C. ⟵ S_2

$y_A=y_M=\frac{4}{a}$.

النقطة M تقع على الدالة f(x) لذلك يتحقق

$\frac{4}{a}=x_M^2 \longrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{a}}{2}=x_M}$

اذاً احداثيات $M:\left(\frac{\sqrt{a}}{2},\frac{4}{a}\right)$

للنقطة M و N يوجد نفس الاحداثي X لذلك $N\left(\frac{\sqrt{a}}{2},0\right)$

$S_1=$ مساحة المستطيل $AMNO = AO\cdot AM$

$AO=\frac{4}{a} \qquad AM=\frac{\sqrt{a}}{2} \Longrightarrow S_1=\frac{4}{a}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{a}}}$

نجد S_2

$$S_2=\int_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{\sqrt{a}}{2}}^{a}=-\frac{1}{a}-\frac{-1}{\frac{\sqrt{a}}{2}}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{a}}=\frac{-1+2\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{2}\,a-1}{a}$$

$$S_{\text{المخططة}}=S_1+S_2=\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{2a}-1}{a}=\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{a}-1}{a}=\boxed{\frac{4\sqrt{a}-1}{a}}$$

ب- دالة المساحة هي

$$S(a)=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$$

$$S'(a)=\frac{\frac{4}{2\sqrt{a}}\cdot a-1(4\sqrt{a}-1)}{a^2}=\frac{2\sqrt{a}-4\sqrt{a}+1}{a^2}$$

$$\boxed{S'(a)=\frac{-2\sqrt{a}+1}{a^2}}$$

$S'(a)=0 \rightarrow -2\sqrt{a}+1=0$

$\rightarrow 1=2\sqrt{a} \rightarrow \frac{1}{2}=\sqrt{a}$

$\rightarrow a=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$\boxed{a=\frac{1}{4}}$$

بما ان المقام موجب لذلك اشارة S'' في $a=\frac{1}{4}$

تحدد فقط اشارة مشتقة البسط

$$S''_{\text{البسط}}=\left(-\cancel{2}\sqrt{a}+1\right)'=\frac{-2}{2\sqrt{a}}=\frac{-1}{\sqrt{a}}$$

$$S''_{\text{البسط}}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}<0$$

اذاً $\boxed{a=\frac{1}{4}}$ نحصل على مساحة قصوى.