حل نموذج بجروت

(805)–482

موعد (ب)-صيف 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

أ. بحسب المعطيات a_n و b_n هما متواليتان هندسيتان لانهائيتان وتحقق:

$a_1=b_1$ // $q_a=q$ و $q_b=3q$ // $\frac{a_n \text{ مجموع}}{b_n \text{ مجموع}}=\frac{S}{T}=\frac{6}{7}$

$S_{a_n}=S=\frac{a_1}{1-q}$ // $S_{b_n}=T=\frac{b_1}{1-3q}$

$$\frac{S}{T}=\frac{\frac{a_1}{1-q}}{\frac{b_1}{1-3q}}=\frac{\cancel{a_1}}{1-q}\cdot\frac{1-3q}{\cancel{b_1}}=\frac{1-3q}{1-q}$$

$a_1=b_1$

اذاً يتحقق:

$$\frac{S}{T}=\frac{1-3q}{1-q}=\frac{6}{7}$$

نحل المعادلة التي توصلنا اليها:

$$\frac{1-3q}{1-q}=\frac{6}{7}\Rightarrow$$

$$6(1-q)=7(1-3q)\Rightarrow 6-6q=7-21q$$

$$\Rightarrow -6q+21q=7-6\Rightarrow 15q=1\Rightarrow \boxed{q=\frac{1}{15}}$$

اذاً أساس المتوالية a_n هو $\boxed{q=\frac{1}{15}}$

وأساس المتوالية b_n هو $3q \Rightarrow \boxed{3q=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}}$

ب. معطى أن: $a_4=5 \rightarrow a_4=a_1q^3=5 \rightarrow a_1\left(\frac{1}{15}\right)^3=5$

$$a_1\cdot\frac{1}{3375}=5\Rightarrow \boxed{a_1=16875}$$

اذاً $\boxed{a_1=16875}$ و $\boxed{b_1=16875}$

نجد b_4

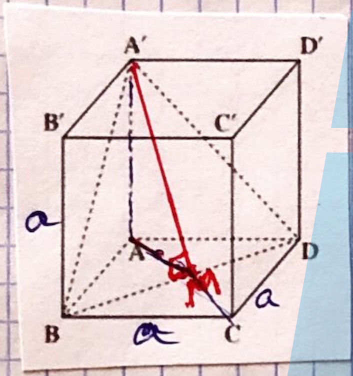
$$b_4=b_1q_b^3=16875\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=16875\cdot\frac{1}{125}$$

$$b_4=\frac{16875}{125}=135\rightarrow \boxed{b_4=135}$$

سؤال 9

أ- المثلث $A'BD$ متساوي الأضلاع لأن أضلاعه: $A'B$, $A'D$ و BD عبارة عن 3 أقطار في 3 مربعات متطابقة (أوجه المكعب عبارة عن مربعات متطابقة) اذ انه بما ان المربعات متطابقة ان أقطارها متساوية.

ب- بما أن $A'BD$ متساوي الأضلاع إذاً لذلك الارتفاع $A'M$ هو ارتفاع النازل على القاعدة BD وبالتالي ينصف القاعدة وينصف زاوية الرأس $\sphericalangle BA'D$ $(\sphericalangle BA'D=60)$



اي يتحقق أن $DM=BM=\frac{1}{2}BD$

ولحسب فيثاغورس في ΔBCD يتحقق:

$$BC^2+CD^2=BD^2$$

$$a^2+a^2=BD^2 \rightarrow 2a^2=BD^2$$

$$\boxed{BD=\sqrt{2}a}$$

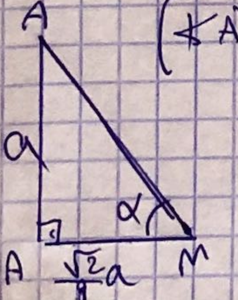
وبالتالي: $\boxed{BM=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a}$

الزاوية بين القاعدة $ABCD$ و $A'M$ هي $\sphericalangle A'MA$

تذكر: الزاوية بين مستقيم ومستوى هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه على المستوى، مسقط $A'M$ على $ABCD$ هو AM
(ننزل عمود من A' على المستوى $ABCD$ - العمود هو AA' وعندها AM هو مسقط $A'M$ على $ABCD$ والزاوية بين $A'M$ و AM هي الزاوية المطلوبة.

أقطار المربع متساوية ولذلك: $DM=BM=AM=MC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

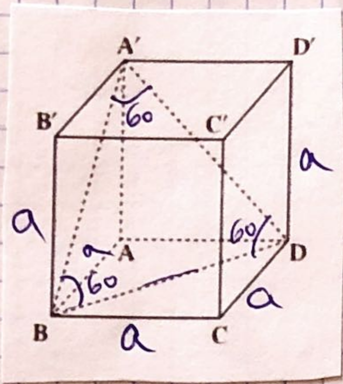
لأن الأقطار تنصف بعضها ومتساوية $(\sphericalangle A'MA=\alpha)$



ويتحقق $tg\alpha=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \rightarrow \boxed{\alpha=54.735^\circ}$

إذاً: $\boxed{\sphericalangle A'MA=54.735^\circ}$

1.ج معطى أن مساحة المثلث $A'BD$ هي $8\sqrt{3}$
أضلاع المثلث $A'BD$ عبارة عن 3 اقطار
لـ 3 مربعات ضلعها a.



$A'D$ قطر المربع $A'D'DA$
$A'B$ قطر المربع $A'B'BA$
BD قطر المربع $ABCD$
وبما ان المربعات نفس الضلع لذلك
الاقطار متساويه والمثلث متساوي الاضلاع $A'D=A'B=BD$
طول الضلع فيه هو $a\cdot\sqrt{2}$ وزوايا متساويه $60°$
ان مساحة المثلث هي

$$S_{\triangle A'BD}=\frac{A'B\cdot A'D}{2}\cdot\sin 60=\frac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

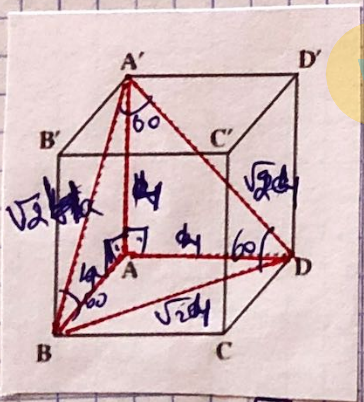
$$S_{\triangle A'BD}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}=8\cdot\sqrt{3}\Longrightarrow\frac{a^2\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{2}=8\cancel{\sqrt{3}}$$

حسب المعطى

$$\Longrightarrow a^2=16\Longrightarrow\boxed{a=4}$$

لان ضلع مربع لذلك موجب.

2.ج



الهرم $AA'BD$ هو الهرم المحدد في الرسم
ولهذا الهرم 4 سطوح التي عبارة عن
4 مثلثات $\triangle A'BD // \triangle A'AD // \triangle A'AB$
و $\triangle A'BD$.
المثلثات $\triangle A'AD$ و $\triangle A'AB$ و $\triangle ABD$
متطابقة، حسب الشرح بالبنود السابقة
مساحة المثلث $A'BD$ حسب البند السابق هي $8\cdot\sqrt{3}$
مساحة المثلث $A'AD$ هي $\frac{AA'\cdot AD}{2}\leftarrow\frac{4\cdot4}{2}=8$
وبالتالي مساحة سطوح الهرم هي

$$S_{\text{سطوح الهرم}}=8+8+8+8\cdot\sqrt{3}=24+8\sqrt{3}=24+13{,}856$$

$$\boxed{S_{\text{سطوح الهرم}}=37.856}$$

سؤال 3

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\quad f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

النقاط القصوى للدالة نجد: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 0$

$\to 2\cos x - 4\sin x \cdot \cos x = 0$

$2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ أو $1 - 2\sin x = 0 \to 1 = 2\sin x \to \boxed{\sin x = \frac{1}{2}}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k = 0 \to \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

$k = 1 \to x = \pi$ ✗
$k = -1 \to x = -\pi$ ✗ } خارج المجال

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ // $x_2 = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\pi k$

$\boxed{k=0}$ $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{6}}$ // $\boxed{x_2 = \frac{5\pi}{6}}$ $k=0$ خارج المجال

$\boxed{k=1}$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ خارج المجال // $\boxed{x_2 = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}}$ $k=1$ خارج المجال

اذا النقاط الـ 2 على أنها نقاط قصوى هي:

$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2}}$ $\quad x_2 = \frac{\pi}{6}$

نفحص النقاط حسب جدول

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	1.5	↘	1

صغرى

$f'(\frac{\pi}{12}) = +$

$f'(\frac{\pi}{3}) = -$

$f(0) = 2\sin(0) + \cos(2\cdot 0) = 1$

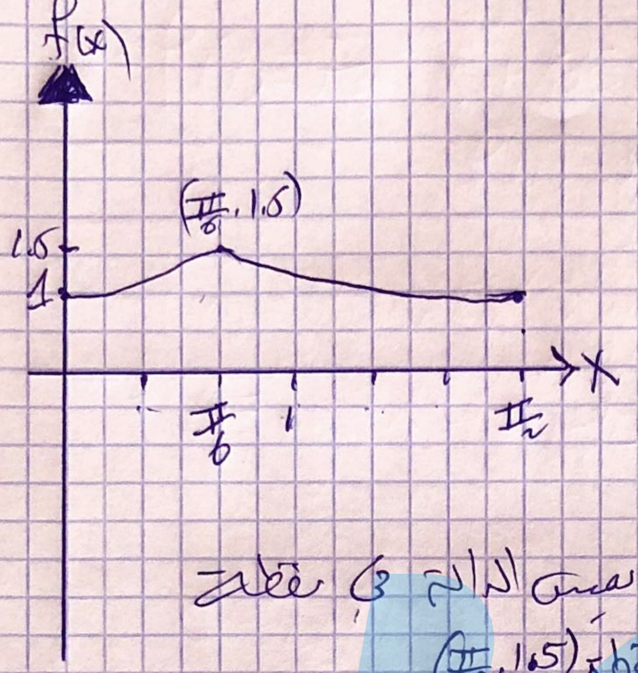
$f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{\pi}{6}) + \cos(2\frac{\pi}{6}) = 1.5$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(2\frac{\pi}{2}) = 1$

$(0, 1)$ نهاية صغرى $\quad (\frac{\pi}{6}, 1)$ max

$(\frac{\pi}{2}, 1)$ نهاية صغرى

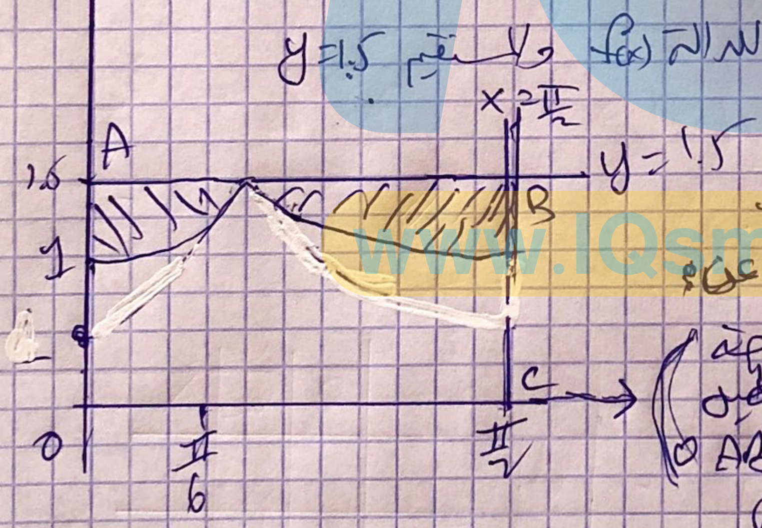
ب- نرسم الدالة $f(x)$



جـ- بما أن المستقيم $y=k$ يمس الدالة في نقطة نهايتها العظمى أي في النقطة $(\frac{\pi}{6}, 1.5)$

وبالتالي معادلته $\boxed{y=1.5}$

جـ2. نرسم المساحة المطلوبة على الرسم:



المساحة بين الرسم البياني للدالة $f(x)$ والمستقيم $y=1.5$ والمستقيم $x=\frac{\pi}{2}$ هي المساحة المبينة بالرسم

وهذه المساحة عبارة عن:

(مساحة المستطيل $OABC$) $-$ (المساحة المحصورة بين الدالة والمحور X في المجال المعطى $[0, \frac{\pi}{2}]$)

$$S_{\text{المطلوبة بالمجال المعطى}} = S_{OABC} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = OA \cdot OC - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x + \cos 2x \, dx$$

$$OA \cdot OC = 1.5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x + \cos 2x \, dx = \left[-2\cos x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{2} - \left[-2\cos 0 + \frac{\sin 2 \cdot 0}{2}\right] = 2$$

$$S_{\text{المطلوبة}} = S_{OABC} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{3}{4}\pi - 2 = \frac{3}{4} \cdot 3.14 - 2 = \boxed{0.355}$$

وحدات مساحة

سؤال 4

$$f(x)=\frac{a-e^x}{e^{2x}} \qquad a>0$$

أ.1 مجال تعريف الدالة هو كل x.

أ.2 تقاطع الدالة مع المحاور

x مع $\leftarrow f(x)=0$

$$f(x)=0=\frac{a-e^x}{e^{2x}}=0$$

$$\rightarrow a-e^x=0 \rightarrow a=e^x \rightarrow \ln a=\ln e^x \rightarrow \boxed{\ln a=x}$$

اذا التقاطع مع x : $\boxed{(\ln a,0)}$

تقاطع مع y $x=0$

$$f(0)=\frac{a-e^0}{e^{2\cdot 0}}=\frac{a-1}{1}=a-1$$

اذاً التقاطع مع y : $\boxed{(0,a-1)}$

ب. معطى أن الرسم البياني يمر في نقطة الاصل أي $(0,0)$ وبالتالي يتحقق $f(0)=0$.

$$f(0)=\frac{a-e^0}{e^{2\cdot 0}}=\frac{a-1}{1}=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

نجد احداثيات النقاط القصوى

$$f'(x)=\frac{-e^x\cdot e^{2x}-2e^{2x}(1-e^x)}{(e^{2x})^2}=\frac{-\cancel{e^{2x}}[e^x+2-2e^x]}{(e^{2x})^{\cancel{2}}}$$

$$f'(x)=\frac{-(2-e^x)}{e^{2x}}=$$

$$f'(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}}=0 \rightarrow e^x-2=0 \rightarrow e^x=2 \rightarrow \boxed{x=\ln 2}$$

x	0	$\ln 2$	2
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

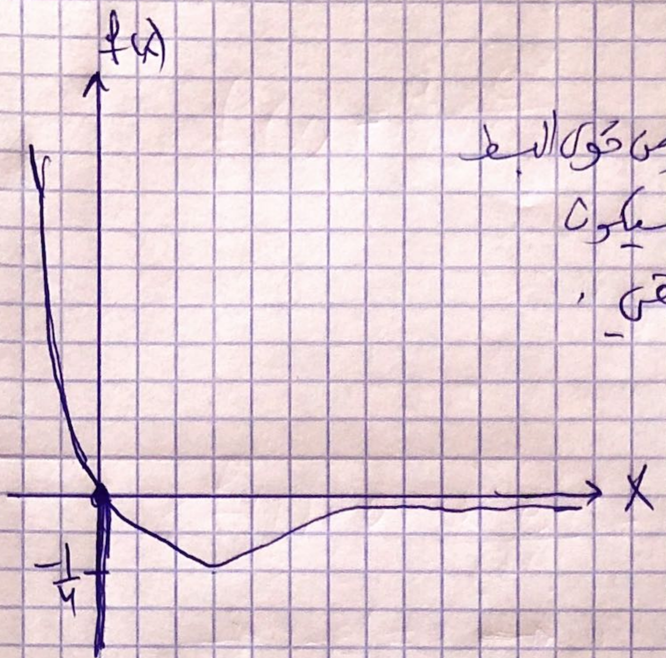
$f'(0)=e^0-2=-2<0$ ↓

$f'(2)=e^2-2>0$ ↑

$$f(\ln 2)=\frac{1-e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2}}=\frac{1-2}{4}=-\frac{1}{4}$$

$\boxed{\min\left(\ln 2,-\frac{1}{4}\right)}$

2ج



بما ان قوة المقام اكبر من قوة البسط
لذلك عندما $x\to\pm\infty$ سيكون
المحور x خط تقارب افقي.

د. معطى ان $g'(x)=f(x)$ اي ان الدالة $f(x)$ هي مشتقة الدالة g.
النقاط الصفرية للدالة $f(x)$ ستكون شكل لنقاط قصوى لـ g
$f(x)=0$ حسب الرسم في $x=0$. نفحص النقطة بواسطة جدول
ونحدد المجال التصاعدي لـ g' بحسب
رسم f.

x	-1	0	1
$g'(x)=f(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗		↘

اذن $x=0$ هي نقطة مكسيموم
للدالة $g(x)$

سؤال 5

$$f(x)=\frac{\ln x^2}{x^2}$$

1.أ مجال تعريف الدالة $f(x)$ هو $x\neq 0$

وهو دمج شرطين $x^2>0$ وأيضا $x^2\neq 0$

التعبير داخل ln موجب — المقام $\neq 0$

2.أ $x=0$ هو خط تقارب عمودي للدالة $f(x)$.

3.أ تقاطع مع المحاور:

تقاطع مع x: $f(x)=0$

$$0=\frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$\ln x^2=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow \boxed{x_1=1} \quad \boxed{x_2=-1}$$

إذا نقاط تقاطع الدالة مع المحور x هي $\boxed{(1,0)}$ $\boxed{(-1,0)}$

تقاطع مع y لا يوجد لأن الدالة غير معرفة في $\boxed{x=0}$

4.أ النقاط القصوى للدالة $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2-(\ln x^2)2x}{(x^2)^2}=\frac{2x-2x\ln x^2}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x(1-\ln x^2)}{x^4}=0 \longrightarrow 2x(1-\ln x^2)=0$$

$x\neq 0$ خارج مجال التعريف.

$$1-\ln x^2=0 \longrightarrow 1=\ln x^2 \longrightarrow x^2=e \longrightarrow x=\pm\sqrt{e}$$

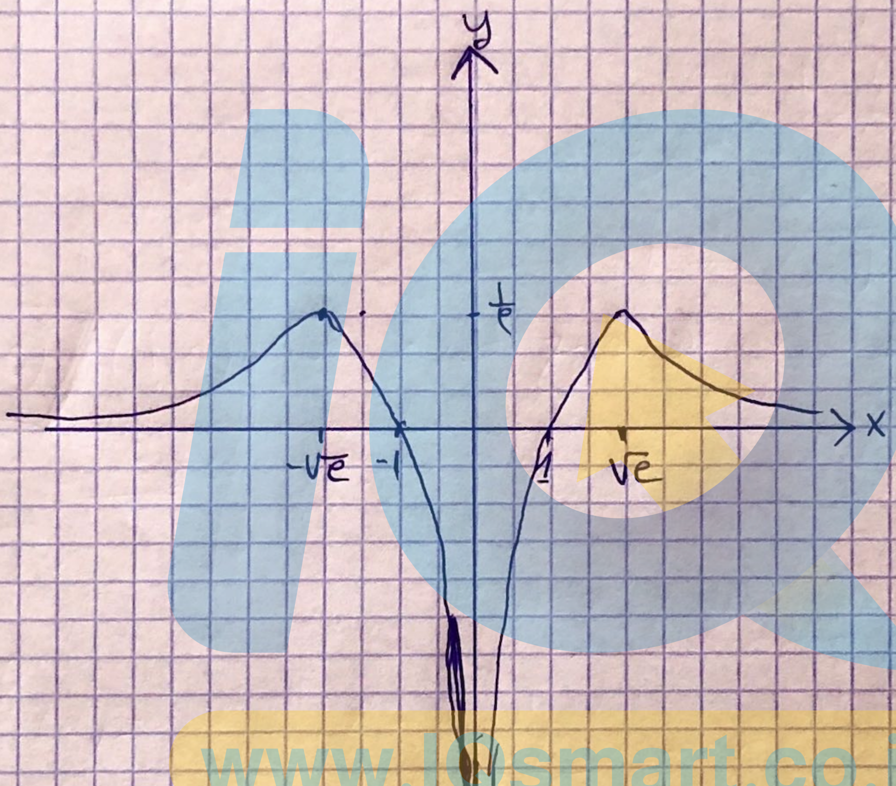
نجد الإحداثي y للنقاط

$$f(\sqrt{e})=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e} \qquad f(-\sqrt{e})=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

نصنف النقاط بحسب جدول:

x	$\boxed{x=-2}$ $x<-\sqrt{e}$	$-\sqrt{e}$	$\boxed{x=-1}$ $-\sqrt{e}<x<0$	0	$\boxed{x=1}$ $0<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{e}$	$\boxed{x=2}$ $x>\sqrt{e}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$f'(-2)=>0$ $f'(-1)=<0$ $f(1)>0$ $f'(2)<0$



6. بحسب الرسم البياني للدالة قاطع المجال الموجب للدالة هو: $\boxed{x>1 \text{ او } x<-1}$

والمجال السالب للدالة هو $-1<x<0$ أو $0<x<1$

ب. لكي نحدد الرسم البياني الملائم للمشتقة نعتمد على العلاقة بين الرسم البياني للدالة والرسم البياني للمشتقة:

دالة تصاعدية $\Longleftrightarrow$ مشتقة موجبة

دالة تنازلية $\Longleftrightarrow$ مشتقة سالبة

نقاط قصوى للدالة $\Longleftrightarrow$ نقاط صفرية للمشتقة.

بحسب الرسم البياني للدالة f:

الدالة تصاعدية في المجال: $0<X<\sqrt{e}$ او $X<-\sqrt{e}$

وبهذه المجالات المشتقة يجب ان تكون موجبة.

الدالة تنازلية في المجال: $-\sqrt{e}<X<0$ أو $0<X<1$

وبهذه المجالات المشتقة سالبة

والنقاط القصوى للدالة هي $X=\sqrt{e}$, $X=-\sqrt{e}$

وهاتين النقطتين هما نقطتين صفريتين.

والرسم الملائم لكل هذه الصفات معًا هو IV