حل نموذج بجروت

(803)-382

موعد (ب)-صيف 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل نموذج 382 (803)
موعد (ب) 2018

حل سؤال 1

(أ.1) نبني جدول يعبر عن سعر الكتب قبل الحملة وبعدها ونجد الثمن الذي دفعته دالية.

	السعر قبل التخفيض	السعر بعد التخفيض
كتاب 1	108	108
كتاب 2	72	$\frac{1}{2} \cdot 72 = 36$
المبلغ الكلي	180	144

التخفيض كان على الكتاب الأرخص بين الأثنين

التخفيض 50% اي $\frac{1}{2}$ السعر ولذلك يدفع $\frac{1}{2}$ ثمن الكتاب

مقابل الكتابين دفعت دالية بعد التخفيض مبلغ 144 شيكل

المبلغ قبل التخفيض

ان المبلغ الذي دفعته دالية ثمن الكتابين بعد التخفيض هو 144 شيكل

(أ.2) حسب الجدول المبلغ قبل التخفيض هو 180 شيكل وبعد التخفيض هو 144 إذن التخفيض هو $(180-144=36)$ 36 شيكل

النسبة المئوية للتخفيض هي $\frac{36}{180} \cdot 100\% = 20\%$

* تذكر لكي نحوّل كسر لنسبة مئوية نضرب ب 100 ونضيف اشارة %

النسبة المئوية للتخفيض هي 20% من المبلغ الكلي

ب.2 نبني جدول بالنسبة للرامي:-

	السعر قبل التخفيض	السعر بعد التخفيض
كتاب 1	$39+X$	$39+X$
كتاب 2	(الارخص) X	$\frac{1}{2}X$ (بعد التخفيض)
المبلغ الكلي	$2X+39$	$X+\frac{1}{2}X+39$

نفرض ان الكتاب 2 هو الأرخص، قبل التخفيض ثمنه X. اذا الكتاب 1 ثمنه $X+39$

بحسب الجدول تبعد التخفيض دفع رامي $x+\frac{1}{2}x+39$

وهذا المبلغ يساوي 165 اذا يتحقق:

$$x+\frac{1}{2}x+39=165$$

$$1.5x+39=165 \Longrightarrow 1.5x=165-39$$

$$\Longrightarrow 1.5x=126 \Longrightarrow x=\frac{126}{1.5}=84$$

اذا ثمن الكتاب الأرخص من بين الاثنين (كتاب 1) هو $x=84$ شيكل

وثمن الكتاب الثاني الأغلى هو $x+39 \Rightarrow 84+39=123$ شيكل

الكتاب الأرخص قبل التخفيض 84
الكتاب الأغلى قبل التخفيض 123

ج 2

حسب ما حصلنا بالبند ب.1 فان ثمن الكتابين معا قبل التخفيض هو:

$84+123=207$ شيكل

وبعد التخفيض هو: 165 شيكل

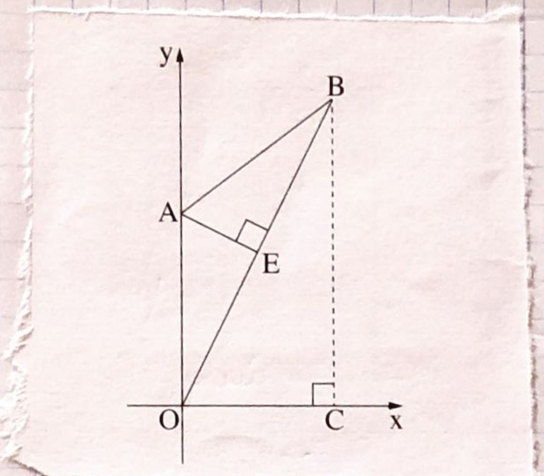
لذلك التخفيض الكلي كان:

$207-165=42$ شيكل

لذلك النسبة المئوية للتخفيض هي $\frac{42}{207}\cdot 100\% = 20.29\%$

اذا النسبة المئوية للتخفيض التي حصل عليها رامي هي 20.29%

حل سؤال 2 :



أ- الرأس A يقع على المحور y

لذلك الإحداثي x للنقطة A هو 0

أي $A:(x_A,0)$.

وكذلك النقطة A تقع على المستقيم AE

ومعادلة AE هي: $y=-\frac{1}{2}x+5$

نعوض $x=5$ ونحصل على

$y_A=-\frac{1}{2}\cdot 0+5=5$

أي $\boxed{A(0,5)}$

ملاحظة: كان بإمكاننا إيجاد إحداثيات النقطة A دون التعويض بمعادلة AE؛ إذ انه من الصورة $y=mx+n$ لمعادلة مستقيم فإن التقاطع مع y للمستقيم يكون بالنقطة $(0,n)$ ولحسب معادلة AE فإن $(0,n)$ هي $(0,5)$ ...

ب. حسب الرسم OB يعامد AE (الزاوية بينهم هي $90°$)

لذلك ميل OB هو $\frac{-1}{\text{ميل } AE}$ أي ميل $OB=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$

وبما أن OB يمر بالنقطة $(0,0)$ إذاً معادلته ستكون $y=2x$

$\boxed{\text{معادلة } OB \quad y=2x}$

ج. النقطة E هي تقاطع المستقيمين OB و AE

ولذلك لكي نجد إحداثياتها نحل معادلتي بمتغيرين

نطرح المعادلتين $\Leftarrow$

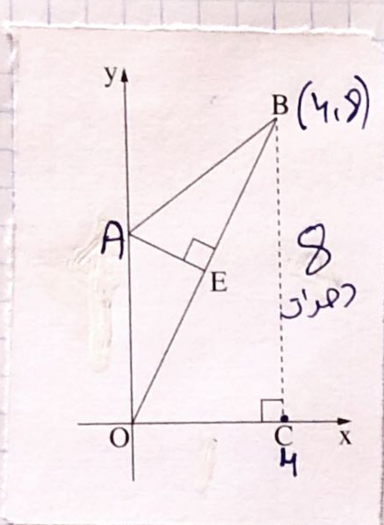
$$AE:\ y=-\frac{1}{2}x+5$$
$$OB:\ y=2x$$
$$0=-\frac{1}{2}x+5-2x$$

$\boxed{x=2} \Leftarrow 2\frac{1}{2}x=5 \Leftarrow 0=-2\frac{1}{2}x+5 \Leftarrow 0=-\frac{1}{2}x+5-2x$

نجد y_E نعوض في واحدة من المعادلتين:

$y=2x \Longrightarrow y_E=2\cdot 2=4$

إذاً $\boxed{E:(2,4)}$



د. حسب البنود السابقة $A(0,5)$

ولذلك طول الضلع $OA=5$

ومعطى أن الاحداثي ~~y~~ للنقطة B هو 8

أي $B:(x_B,8)$. نجد y_B, نعوض

في معادلة المستقيم OB

$$OB: 8=2x_B$$

$$\boxed{4=x_B} \Longleftarrow 8=2\cdot x_B$$

اذًا $B:(4,8)$

نجد طول الضلع AB:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(5-8)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=$$

$$\boxed{\overline{AB}=\sqrt{25}=5}$$

اذًا $OA=OB=5$ والمثلث OAB متساوي الساقين.

هـ. بحسب نتائج البنود السابقة:

$$OA=5,\ AB=5$$

بما أن $B:(4,8)$ اذًا $BC=8$ واحداثيات C هي $C:(4,0)$

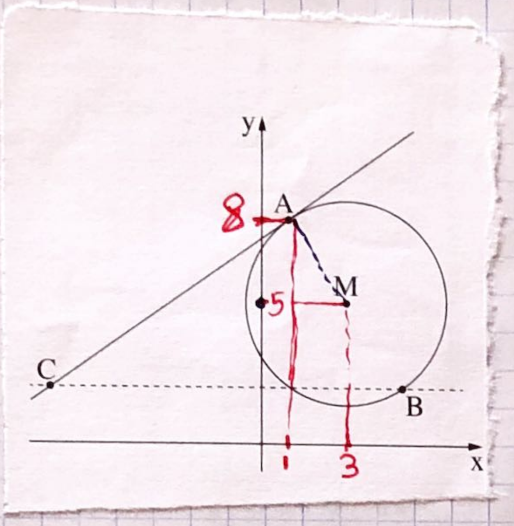
من هنا $OC=4$

محيط الشكل الرباعي $OABC$

$$=\underbrace{OA}_{5}+\underbrace{AB}_{5}+\underbrace{BC}_{8}+\underbrace{OC}_{4}=22$$

$$\boxed{\text{محيط الشكل الرباعي } OABC \text{ هو } 22.}$$

حل سؤال 3



أ.1) معادلة الدائرة هي من الصورة

$$(x-3)^2+(y-5)^2=R^2$$

الدائرة تمر ب $A:(1,8)$

نعوض A في معادلة الدائرة ونجد R

$$(1-3)^2+(8-5)^2=R^2$$

$$(-2)^2+(3)^2=R^2$$

$$4+9=R^2 \Longrightarrow 13=R^2$$

$$\boxed{R=\sqrt{13}}$$

أ.2) معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y-5)^2=13$

ب.1) AM هو نصف قطر بالدائرة وبما أن نصف القطر عمودياً على المماس (أي الزاوية بينهم 90°) اذا حاصل ضرب ميليهما هو -1.

نجد اولاً ميل AM ومن ثم نجد ميل AC ومعادلته.

AM يمر بالنقاط $A(1,8)$ $M:(3,5)$

$$\text{ميل } AM=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{8-5}{1-3}=\frac{3}{-2}$$

$$\boxed{\text{ميل } AM=\frac{3}{-2}}$$

ب.2) $\text{ميل المماس}=\frac{-1}{\text{ميل } AM}=\frac{-1}{\frac{3}{-2}}=\frac{2}{3}$

معادلة المماس من الصورة:

$$y=mx+n$$

$m=\frac{2}{3}$ والمماس يمر بالنقطة $A(1,8)$

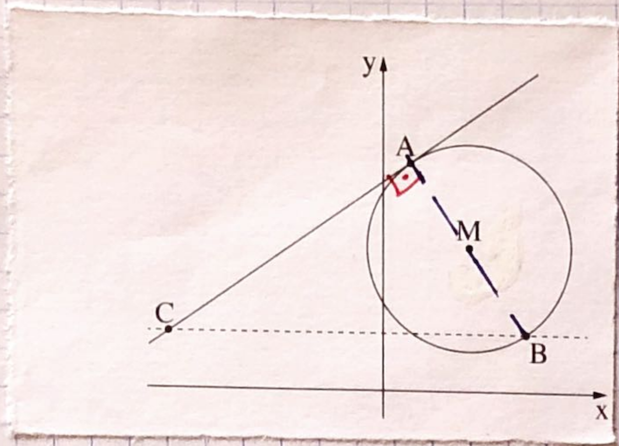
نعوض ونجد n:

$$8=\frac{2}{3}\cdot 1+n \Longrightarrow 8=\frac{2}{3}+n$$

$$8-\frac{2}{3}=n$$

$$\boxed{7\tfrac{1}{3}=n}$$

ومعادلة المماس AC هي: $y=\frac{2}{3}x+7\frac{1}{3}$



ج. بما أن AB قطر لذلك
النقطة M هي منتصف AB
وبالتالي يمكننا إيجاد احداثيات B
بحسب قانون إحداثيات منتصف قطعة

$A(1,8)$ $M:(3,5)$ $\Longrightarrow$

$x_m=\frac{x_A+x_B}{2}$	$y_m=\frac{y_A+y_B}{2}$
$3=\frac{1+x_B}{2}$	$\cdot 2 / 5=\frac{8+y_B}{2} / \cdot 2$
$6=1+x_B$	$10=8+y_B$
$6-1=x_B$	$10-8=y_B$
$\boxed{5=x_B}$	$\boxed{2=y_B}$

$\boxed{\text{إذن } B:(5,2)}$

د. مساحة المثلث ABC هي: $\frac{AB\cdot AC}{2}$

$AB=2\sqrt{13} \Leftarrow AB=2R$

نجد احداثيات C ومن ثم نحسب الطول AC.
بما أن BC يوازي المحور X أن الاحداثي y للنقطة C هو
نفسه الاحداثي y للنقطة B أي $\boxed{y_c=2}$.
النقطة C تقع على المستقيم AC، نعوض في معادلة AC مكان $y=2$ ونجد x_c

$AC \quad y=\frac{2}{3}x+7\frac{1}{3}$

$2=\frac{2}{3}x+7\frac{1}{3} \Longrightarrow 2-7\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x_c$

$\Longrightarrow -5\frac{1}{3}=\frac{2}{3}x_c \xrightarrow[\text{نضرب ب } \frac{3}{2}]{} \boxed{-8=x_c} \Longrightarrow C:(-8,2)$

نجد طول AC: $A(1,8)$ $C:(-8,2)$

$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(1--8)^2+(8-2)^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{81+36}$

$AC=\sqrt{117}$

$S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{117}}{2}=39$

إذاً مساحة المثلث ABC هي 39 وحدة مساحة

حل سؤال 4

أ- $f(x)=0.5x^2+\frac{8}{x}$

مجال تعريف الدالة هو $x\neq 0$.

أي أن الدالة مُعرفة لكل x ما عدا عندما $x=0$

ب- لكي نجد النقاط القصوى، نجد النقاط التي فيها مُشتقة الدالة تساوي صفر

$$f'(x)=0.5\cdot 2x+8\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=x-\frac{8}{x^2}=0 \Rightarrow x-\frac{8}{x^2}=0$$

نضرب المعادلة بـ x^2 $\Leftarrow$ $x^2/\,x-\frac{8}{x^2}=0/\,x^2$

$$\Rightarrow x^3-8=0$$

$$x^3=8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$$

اذاً النقطة $x=2$ هي نقطة التي من المحتمل أن تكون نقطة قصوى للدالة. ولتحديد نوع النقطة نفحص كيف تتصرف المشتقة بجوار النقطة وهل هي موجبة او سالبة وحسبها نحدد هل الدالة تصاعدية أم تنازلية:

x	1	2	3
$f'(x)$	(−7) −	0	$2\frac{1}{9}$ +
$f(x)$	↘ تنازلية	min	↗

$f'(x)=x-\frac{8}{x^2}$

$f'(1)=1-\frac{8}{1^2}=1-8=-7$

$f'(3)=3-\frac{8}{3^2}=3-\frac{8}{9}=2\frac{1}{9}$

اذاً $x=2$ هي نقطة مينيمام, نجد الاحداثي y للنقطة، نعوض بالدالة

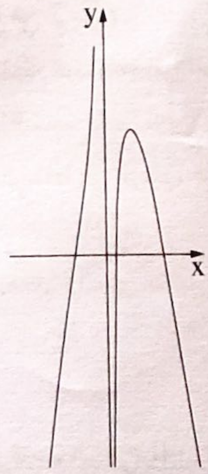
$$f(2)=0.5\cdot(2)^2+\frac{8}{2}=\frac{1}{2}\cdot 4+4=2+4=6$$

اذاً (2,6) نقطة مينيمام للدالة.

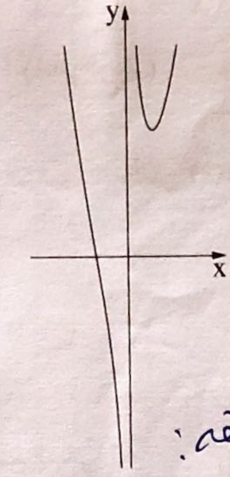
ج- لكي نفحص هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في $x=-1$ نجد اشارة المشتقة في $x=-1$ وهل هي موجبة أم سالبة وحسبها نحدد

$f'(x)=x-\frac{8}{x^2} \Rightarrow f'(-1)=-1-\frac{8}{(-1)^2}=-1-\frac{8}{1}=-9$ سالبة

اذاً الدالة تنازلية في $x=-1$



II



I

البند هـ

بند (هـ) يطلب منا تحديد أي رسم ملائم للدالة التي بحثناها.

حسب نتائج البنود السابقة:

النقطة (2,6) نقطة نهاية للدالة

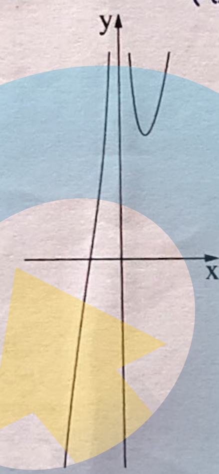
وبالتالي الرسمين II و IV غير ملائمين للدالة.

وحسب البند (ج) الدالة f(x) تنازلية في X=-1

وبالتالي الرسم III غير ملائم للدالة

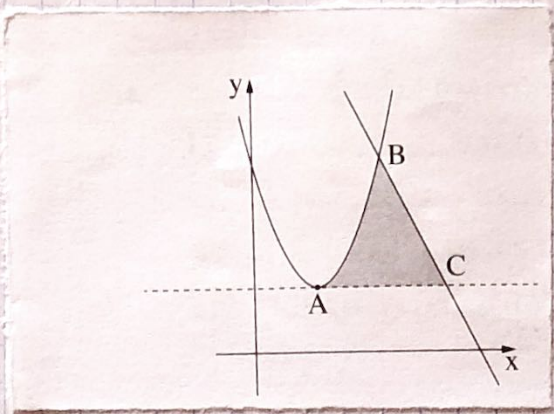
أي أن الرسم البياني الملائم للدالة هو الرسم I.

IV



III

حل سؤال 5



$f(x) = x^2 - 4x + 6$ دالة تربيعية (اسمها قطع مكافئ)

$g(x) = -2x + 14$ دالة خطية (اسمها خط مستقيم)

$B(4,6)$ تقاطع الدالتين.

أ) النقطة A هي رأس الدالة التربيعية وهي نقطة نهاية صغرى للدالة أي لا نهاية عظمى.

من الممكن إيجاد إحداثيات A بطريقتين من خلال المشتقة للدالة f أو من خلال إيجاد احداثيات رأس الدالة التربيعية.

سنجدها بواسطة المشتقة:

$$f'(x) = 2x - 4 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 4 = 0 \Longrightarrow 2x = 4$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 2}$$

نجد الاحداثي y للنقطة ⟸ نعوض بالدالة

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 4 - 8 + 6 = 4$$

$$\boxed{\text{إذاً: } A(2,4)}$$

ب) المستقيم AC هو مماس للدالة $f(x)$ في النقطة A.

AC يوازي المحور X لذلك الاحداثي y للنقطة C هو نفسه الاحداثي y للنقطة A أي $C:(x_c,2)$

نعوض $y=2$ في معادلة المستقيم ونجد x_c :

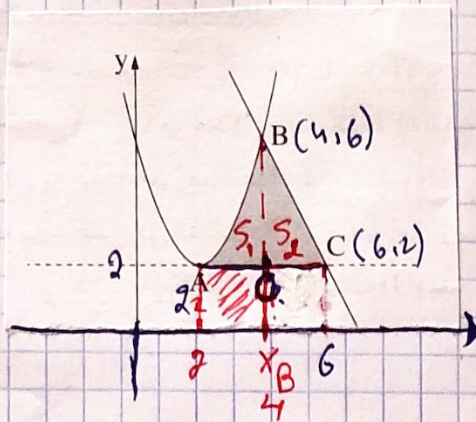
$$g(x) = -2x + 14$$

$$2 = -2x + 14 \Longrightarrow 2 - 14 = -2x \Longrightarrow -12 = -2x$$

$$\Longrightarrow \frac{-12}{-2} = x \Longrightarrow \boxed{6 = x}$$

إذاً $C:(6,2)$

البند .p



نقسم المساحة الرمادية الى قسمين: S_1 و S_2.

$S_1 =$ المساحة بين الدالة f(x) والمحور x في القطعة [2,4] (ناقص) مساحة المستطيل المخطط بالأحمر.

مساحة المستطيل هي: $2 \times 2 = 4$ وحدات مساحة.

المساحة بين الدالة والمحور x في القطعة [2,4] هي $\int_2^4 f(x)dx$.

$$\int_2^4 x^2-4x+6\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+6x\right]_2^4 = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right]_2^4$$

$$\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2+6\cdot 4\right)-\left(\frac{2^2}{3}-2\cdot 2^2+6\cdot 2\right) = \left(21\tfrac{1}{3}-32+24\right)-\left(2\tfrac{2}{3}-8+12\right)$$

$$= 13\tfrac{1}{3} - 6\tfrac{2}{3} = 6\tfrac{2}{3}$$

اذا المساحة بين المحور x والدالة f(x) هي $6\frac{2}{3}$.

مساحة المستطيل هي 4.

وبالتالي: $S_1 = 6\frac{2}{3} - 4 = 2\frac{2}{3}$

نجد S_2: S_2 عبارة عن مساحة المثلث $OBC = \frac{OB\cdot OC}{2}$

$OB = 6-2 \rightarrow \boxed{OB=4}$ // $OC = 6-4 = 2 \Rightarrow \boxed{OC=2}$

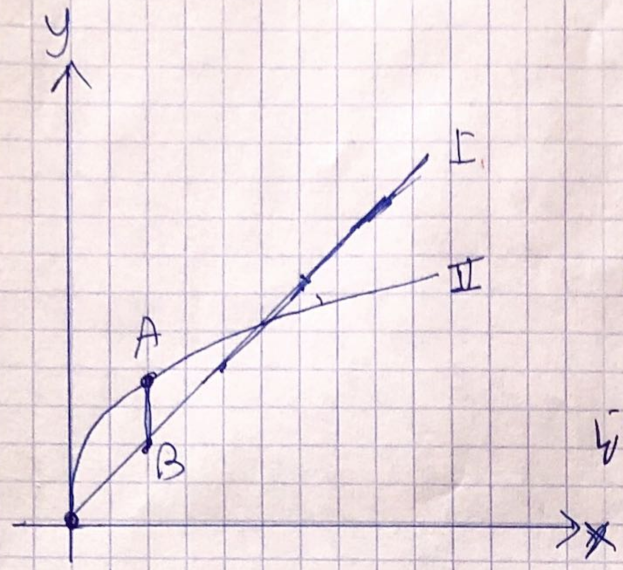
اذاً: $S_2 = S_{OBC} = \frac{2\times 4}{2} = 4$

المساحة الرمادية عبارة عن S_1+S_2

$S_1+S_2 = 2\frac{2}{3}+4 = 6\frac{2}{3}$

اذاً المساحة الرمادية هي $6\frac{2}{3}$

حل سؤال 6



$y=x$ I $\qquad y=\sqrt{x}$ II

أ) بما أن القطعة AB موازية للمحور y
اذاً للنقطة A والنقطة B نفس الاحداثي x
وبالتالي طول القطعة AB هو $y_A - y_B$
A تقع على الدالة $y=\sqrt{x}$ وبالتالي إحداثياتها
من الصورة $A:(x,\sqrt{x})$
B تقع على الرسم البياني للدالة $y=x$
ولذلك إحداثياتها من الصورة (x,x)
وبالتالي طول القطعة AB هو:-

$$AB = \sqrt{x} - x$$

والدالة التي تعبر عن هذا البعد هي: (أي طول القطعة)

$$f(x) = \sqrt{x} - x$$

نجد متى يكون هذا الطول أكبر ما يمكن أي متى نحصل الدالة $f(x)$ على أكبر قيمة لها:-

$$f'(x) \overset{?}{=} 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow \text{(نربع الطرفين)} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{4} = x}$$

نفحص هل النقطة מקסימום او מינימום بواسطة جدول

$f'(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{8}}} - 1 = +$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 = -$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

$\Longrightarrow$ $\boxed{x=\frac{1}{4}}$ מקסימום

ب) نجد أكبر طول للقطعة AB بواسطة الدالة $f(x)$

$$f(\tfrac{1}{4}) = \sqrt{\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$

إذاً أكبر طول للقطعة AB هو $\frac{1}{4}$