حل نموذج بجروت

(807)-582

موعد (أ)-صيف 2018

طاقم الرياضيات

معهد IQ

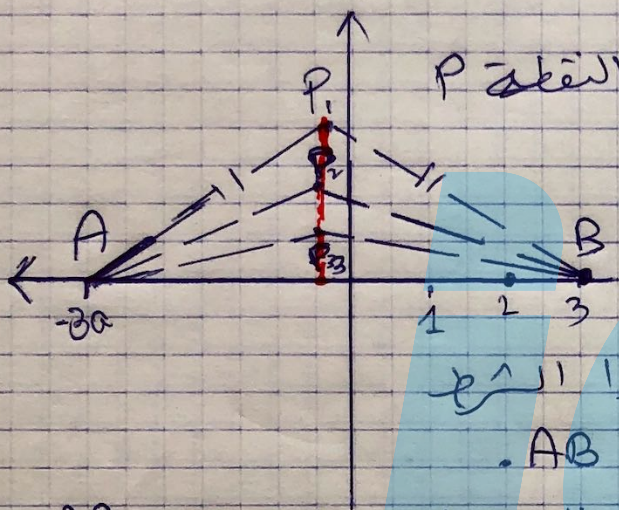
حل سؤال 1 :

معطى النقطتان $A:(-3a,0)$ و $B(3,0)$ بحيث $a>0$ بارامتر

السؤال يطلب المحل الهندسي لكل النقاط P التي

تحقق أن $\frac{PA}{PB}=1$ اي $PA=PB$

تعين النقاط في هيئة محاور:



نحاول أن نحدد كيف ستتحرك النقطة P

بحيث يتحقق ان $PA=PB$

ونلاحظ اننا سنحصل كل مرة على

مثلث متساوي الساقين $PA=PB$

مجموعة النقاط P التي تحقق هذا الشرط

ستكون العمود المتوسط للضلع AB.

وبما أن AB على المحور X إذاً العمود المتوسط للضلع AB

سيكون عمودياً على المحور X اي موازٍ للمحور Y ومعادلته

هي: $X=K$ بحيث K هو احداثيات منتصف القطعة AB

منتصف AB هو: $K=\frac{x_A+x_B}{2} \Leftarrow K=\frac{-3a+3}{2} \Leftarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{X=-1.5a+1.5}$$

انتبه من الممكن ان نحل السؤال بواسطه حساب طول القطعة PA

وطول القطعة PB بحيث $P=(x_p,y_p)$

$$PA=\sqrt{(x_p-(-3a))^2+(y_p-0)^2} \qquad PB=\sqrt{(x_p-3)^2+(y_p-0)^2}$$

$$\overrightarrow{PA}=\sqrt{(x_p+3a)^2+y_p^2} \qquad PB=\sqrt{(x_p-3)^2+y_p^2}$$

$$PA=PB$$

نحل المعادلة الناتجة ونحصل على نفس النتيجة..

ب - نفرض ان احداثيات النقطة Q هي (X_Q, Y_Q)

اذا:

$$QA=\sqrt{(X_Q+3a)^2+y_Q^2}$$

$$QB=\sqrt{(X_Q-3)^2+y_Q^2}$$

وتتحقق ان $\frac{QA}{Q_B}=2$ اي $QA=2QB$

$$\longrightarrow 2\sqrt{(X_Q-3)^2+y_Q^2}=\sqrt{(X_Q+3a)^2+y_Q^2}$$

نربع الطرفين:

$$4\left[(X_Q-3)^2+y_Q^2\right]=(X_Q+3a)^2+y_Q^2$$

$$\Longrightarrow 4\left[X_Q^2-6X_Q+9+y_Q^2\right]=X_Q^2+6aX_Q+9a^2+y_Q^2$$

$$4X_Q^2-24X_Q+36+4y_Q^2=X_Q^2+6aX_Q+9a^2+y_Q^2$$

نجمع المركبات في طرف واحد من المعادلة ونقسم المعادلة على 3 ونبسط نحصل على المعادلة

$$X_Q^2-X_Q(8+2a)+12-3a^2+y_Q^2=0$$

$$X_Q^2-2X_Q(4+a)+y_Q^2=3a^2-12$$

نكمل المعادلة الى تربيع كامل:

$$X_Q^2-2X_Q(4+a)+\underbrace{(4+a)^2}+y_Q^2=\underbrace{(4+a)^2}+3a^2-12$$

اضفنا المركب لطرفي المعادلة

$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=16+8a+a^2+3a^2-12$$

$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=4a^2+8a+4=4(a^2+2a+1)$$

$$(X_Q-(4+a))^2+y_Q^2=2^2(a+1)^2=\left[2(a+1)\right]^2$$

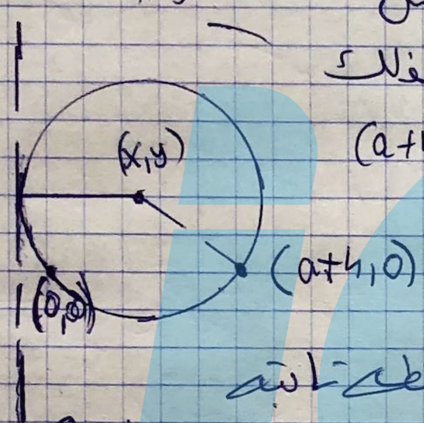
وهذه معادلة دائرة مركزها $(4+a,0)$ ونصف قطرها $R=2(a+1)$

ج 1- المحل الهندسي في البند (أ) هو مستقيم معادلته $y=-1.5a+1.5$.

مركز الدائرة التي حصلنا عليها في البند ب هو $(4+a,0)$

الدوائر التي تمس المستقيم $x=-1.5a+1.5$ وتمر عبر مركز الدائرة التي حصلنا عليها في البند (ب) تشكل محلاً هندسيًا يمر في نقطة الأصل، تحقق الشروط التالية:

$x=-1.5a+1.5$



1- بما ان مجموعة الدوائر هذه تمس المستقيم وتمر بـ $(a+4,0)$ لذلك بُعدها عن المستقيم وعن $(a+4,0)$ متساوي وهو R نصف قطر الدائرة في البند (ب) اي ان مركز هذه الدوائر تبعد عن نقطة ثابتة ومستقيم ثابت نفس البعد وهو $R=2(a+1)$ والمحل الهندسي هذا يمر بـ $(0,0)$ ولذلك يحقق تعريف المحل الهندسي البرابولا الذي هو المحل الهندسي لكل النقاط في المستوى التي تبعد بعداً متساوياً عن نقطة ثابتة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت (الدليل).

2. ب. في البرابولا يتحقق:

احداثيات البؤرة هي $(\frac{p}{2},0)$ ومعادلة الدليل $x=-\frac{p}{2}$

وبالتالي يتحقق:

$\frac{p}{2}=a+4$ وايضا كذلك $-\frac{p}{2}=-1.5a+1.5$

$\Leftarrow p=2a+8$ وايضا $-p=-3a+3 \Leftarrow p=-3+3a$

نحل معادلتين بمتغيرين:

$2a+8=-3+3a$

$a=11 \Longrightarrow \boxed{a=11}$

وعندها $p=2\cdot(11)+8 \longleftarrow \boxed{p=30}$

ومعادلة البرابولا $y^2=2px \Leftarrow \boxed{y^2=60x}$

حل سؤال 2

أ- بحسب المعطيات:

$DA=4$ ، $AA'=3$

$AB=a$ بارامتر $a>0$

$AP=2PA'$ ، $N(0,5,0)$ ← بما أن $AP=2PA'$

و $AA'=3$ لذلك:-

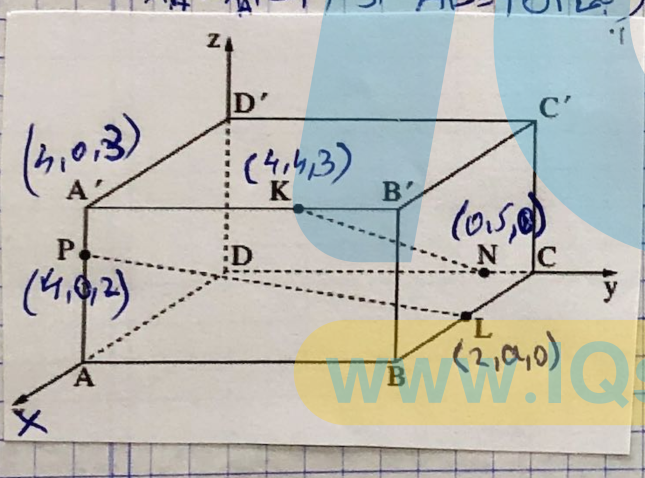
$AP=2$ و $PA'=1$

L منتصف BC

$\overrightarrow{A'K}=\frac{4}{5}\overrightarrow{DN}$

لكي نجد معادلة المستوى PNK نحدد احداثيات 3 نقاط تقع على المستوى , P و N و K . معطى ان $N(0,5,0)$.

بما أن P تقع على الضلع AA' و لذلك الاحداثي x للنقطة P هو نفسه الاحداثي x للنقطة A' وبما أن $AD=4$ اذاً $x_A=x_{A'}=4$



الاحداثي y للنقطة P هو 0

وبما انه يتحقق ان $AP=2$

لذلك احداثيات P هي $P(4,0,2)$.

النقطة L منتصف BC ← $\boxed{x_L=2}$

لأن $BC=AD=4$. و L تقع بالمستوى $[XY]$

لذلك الاحداثي z لها 0 وبالتالي

احداثيات النقطة L هي $L:(2,a,0)$.

بما أن $\overrightarrow{A'K}=\frac{4}{5}\overrightarrow{DN}$ و $N(0,5,0)$ لذلك يتحقق أن $y_K=\frac{4}{5}y_N=\frac{4\cdot 5}{5}=4$

اذاً $\boxed{y_K=4}$ وبالتالي $A'(4,0,3)$ ونحصل على $K(4,4,3)$

وبهذا حصلنا على احداثيات النقاط $K(4,4,3)$ $P(4,0,2)$ $N(0,5,0)$

نجد احداثيات المتجهات $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{NK}$

$$\overrightarrow{NP}=P-N=(4,-5,2)$$

$$\overrightarrow{NK}=K-N=(4,-1,3)$$

المتجهان $\overrightarrow{NK}$ و $\overrightarrow{NP}$ هما متجهان غير مرتبطان خطيا

ولذلك يفرشان المستوى PNK (ל.ס פורש מישור)

معادلة المستوى من الصورة

$$ax+by+cz+d=0$$

بحيث المتجه $\underline{u}=(a,b,c)$ يعامد $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{NK}$

ولذلك يتحقق :-

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(4,-5,2)=0 \Longrightarrow 4a-5b+2c=0\\(a,b,c)\cdot(4,-1,3)=0 \Longrightarrow 4a-b+3c=0\end{cases}$$

نطرح المعادلتين نحصل على :-

$$-4b-c=0 \Longrightarrow \boxed{c=-4b}$$

نعوض $\boxed{b=1} \leftarrow \boxed{c=-4}$ نعوض ونجد a نحصل على: $\boxed{a=\frac{13}{4}}$

وبالتالي معادلة المستوى هي:

$$\frac{13}{4}x+y-4z+d=0$$

نجد d

نعوض النقطة $K(4,4,3)$ بالمعادلة ونحصل على

$$\frac{13}{4}\cdot 4+4-\frac{4\cdot 3}{12}+d=0 \Longrightarrow \boxed{d=-5}$$

معادلة المستوى PNK : $\frac{13}{3}x+y-4z-5=0$

ب. تمثيل برامتري للمستقيم NK :-

المتجه $\overrightarrow{NK}$ هو $\overrightarrow{NK}=(4,1,-3)$ وهو المتجه الاتجاهي

(וקטור כיוון) وبالتالي التمثيل البرامتري له هو

$$NK: \underline{x}=(0,6,0)+t(4,-1,3)$$

وبنفس الاسلوب النسبي للمستقيم PL:

$$\overrightarrow{PL}=L-P=(2,a,0)-(4,0,2)=(-2,a,-2)$$

والتمثيل البرامتري للمستقيم PL هو

$$PL: X=(4,0,2)+s(-2,a,-2)$$

2.ب المتجه الاتجاهي للمستقيم NK هو $\vec{NK}(4,-4,3)$

والمتجه الاتجاهي للمستقيم PL هو $\vec{PL}(-2,a,-2)$

وواضح أن المتجهين غير مرتبطين خطيًا لذلك المستقيمين

بالضرورة غير متوازيين. وبقي علينا نتفي انهما متقاطعين

نبرهن ان L لا تقع بالمستوى PNK وعندها نستنتج ان

المستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين وبالتالي متصالبين.

نعوض احداثيات النقطة L بالمستوى:

$$L(2,a,0) \Rightarrow \frac{13}{4}\cdot 2+2a+0-5=0$$

$$\Rightarrow 1.5+2a=0 \rightarrow a=\frac{-3}{4}<0$$

اذا حصلنا على a سالب وهذا يناقض معطيات السؤال

ان a موجب وبالتالي L لا تقع على المستوى PNK

وبالتالي المستقيمين متصالبين.

ج.1

$$\cos\sphericalangle PC'C=\frac{|\vec{PC'}\cdot\vec{CC'}|}{|\vec{PC'}|\cdot|\vec{CC'}|}$$

$$\vec{C'P}=P-C'=(4,0,2)-(0,a,3)=(4,-a,-1)$$

$$\vec{CC'}=(0,0,1)$$

$$|\vec{C'P}|=\sqrt{4^2+(-a)^2+(-1)^2}=\sqrt{17+a^2}$$

$$|\vec{CC'}|=\sqrt{0^2+0^2+1}=\sqrt{1}=1$$

وبالتالي:

$$\cos 82.1=\frac{|(4,0,2)\cdot(4,-a,-1)|}{\sqrt{17+a^2}\cdot(1)}=\frac{1}{\sqrt{17+a^2}}$$

$()^2 \Downarrow$ نربع الطرفين نحصل على

$$0.01889=\frac{1}{17+a^2}$$

$$\Rightarrow 17+a^2=\frac{1}{0.01889}\rightarrow \dots \rightarrow a^2=35.935\Rightarrow \boxed{a=5.99\approx 6}$$

2.ج بما ان $\cos 90=0$ لذلك يجب ان يتحقق أن

$$|(4,-a,-1)\cdot(0,0,1)|=0 \Rightarrow |-1|=0$$

وهذا غير ممكن اي لا يوجد a يحقق المطلوب.

حل سؤال 3

أ. بحسب المعطيات z_1 و z_2 هما عددان مركبان

ويحققان $|z_1|=|z_2|=r$ وكذلك $\arg z_1+\arg z_2=90^\circ$

نفرض $\arg z_1=\theta$ إذاً $\arg z_2=90-\theta$ وبالتالي يمكن التعبير

عن العددين z_1 و z_2 بالصورة القطبية كالتالي:

$$z_1=r\,cis\theta \quad // \quad z_2=r\,cis(90-\theta)$$

وعندها يتحقق:

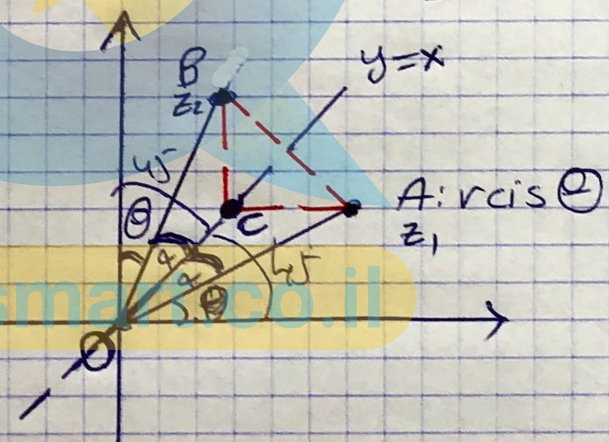
$$z_1\cdot z_2=r\,cis\theta\cdot r\,cis(90-\theta)$$

$$z_1\cdot z_2=r^2 cis(\theta+(90-\theta))=r^2\overbrace{cis90}^{i}$$

حاصل الضرب عدد وهمي $\boxed{z_1 z_2=r\cdot i}$

ب. $A=r\,cis\theta$ و $B=r\,cis(90-\theta)$ نحدد النقاط A، B، C

في هيئة محاور:



بما أن النقطة B هي z_2

فالزاوية بين المحور X والعدد z_2

هي $90-\theta$ وبين العدد والمحور y هي θ.

المستقيم $y=x$ يصنع زاوية مقدارها 45°

مع المحور X (بالاتجاه الموجب)

وأيضاً الزاوية بين المستقيم $y=x$

والمحور y هي 45° وبالتالي

ينتج أن $\triangle OCB\cong\triangle OCA$

OC مشترك

$OB=OC=r$

$\angle OCA=\angle OCB=45-\theta=\alpha$

اذاً يتطابق المثلثان حسب (ض، ز، ض)

ومن التطابق ينتج ان $BC=AC$ والمثلث ABC متساوي الساقين

$$\boxed{D = z_3 (r^2 \cdot i)^2 = -r^4 z_3} \Leftarrow D = (z_3)\cdot(z_1 \cdot z_2)^2$$ 1.أ

ويتحقق أن:

$$z_1 + z_2 = 7 + 7i$$
$$z_1 - z_2 = 1 - i$$

بجمع المعادلتين:

$$\Rightarrow 2z_1 = 8 + 6i$$
$$z_1 = 4 + 3i$$

نجد z_2 نعوض في المعادلة $z_1 + z_2 = 7 + 7i$

$$\Rightarrow 4 + 3i + z_2 = 7 + 7i \Rightarrow \boxed{z_2 = 3 + 4i}$$

كما معطى أن: $(z_3)^2 = 2i$:-

$$(z_3)^2 = 2i = 2\text{cis}90 \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{90 + 360K}{2}$$

حسب ديموافر

$$\Rightarrow z_{3_I} = \sqrt{2}\,\text{cis}45 \quad (K=0) \Rightarrow \boxed{z_{3_I} = 1 + i}$$

$$z_{3_{II}} = \sqrt{2}\,\text{cis}(45 + 180) = \sqrt{2}\,\text{cis}225 \quad (K=1)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{3_{II}} = -1 - i}$$

اذاً للنقطة $C = z_3$ هنالك إمكانيتين :-

$C_I = (1,1)$ $\quad [z_3 = 1 + i \Rightarrow C:(1,1)]$

$C_{II} = (-1,-1)$ $\quad [z_3 = -1 - i \Rightarrow C:(-1,-1)]$

2.أ نجد D:

$$D = -r^4 \cdot z_3 \Rightarrow r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$D = -(5)^4 z_3 = -625\, z_3 \qquad D_1 = -625\cdot(1,1) = (-625,-625)$$

$$\Rightarrow D_2 = -625(-1,-1) \Rightarrow D_2(+625,+625)$$

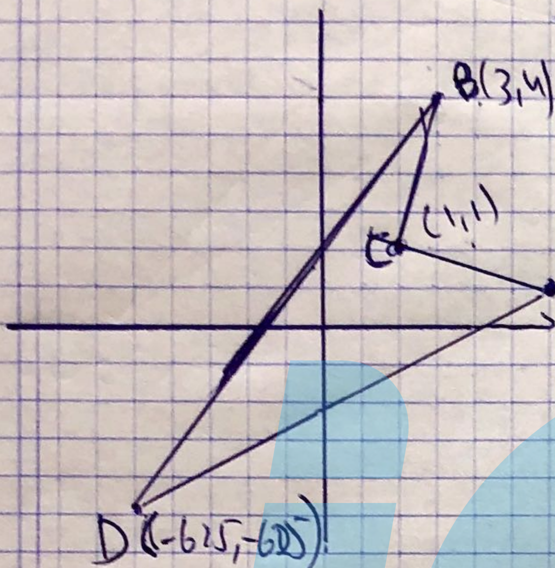
اذاً: $D_1(-625,-625)$ $\quad D_2(625,625)$

ب 2

النقطة C بالربع الأول هي $C:(1,1)$

وعندها الرأس D الملائم هو $D:(-625,-625)$

نرسم الشكل الرباعي الناتج!



الشكل الرباعي الناتج هو دالتون

مساحة الدالتون هي $\frac{\text{حاصل ضرب الأقطار}}{2}$

نجد طول الأقطار

$$AB=\sqrt{(4-3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$$

$$CD=\sqrt{(1+625)^2+(1+625)^2}=\sqrt{2\cdot 626^2}$$

$$CD=\sqrt{2}\cdot 626$$

إذاً:

$$S_{ABCD}=\frac{AB\cdot CD}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 626}{2}$$

$$\boxed{S_{ABCD}=626}$$

وحدات مساحة

حل سؤال 4

1.P) الدالة $f(x)=e^{2mx}-e^{mx}$ برامتر $m>0$

معرفه لكل x اي مجال تعريف الدالة هو R

2.P) مع المحور $x \longrightarrow y=0$

$$0=e^{2mx}-e^{mx} \longrightarrow 0=e^{mx}(e^{mx}-1)=0$$

$$(e^{mx}\neq 0) \Rightarrow e^{mx}-1=0 \Longrightarrow e^{mx}=1=e^{0} \longrightarrow \boxed{x=0}$$

تقاطع مع x $(0,0)$ وهي التقاطع مع y ايضا.

3.P) خطوط التقارب:

$$\lim_{x\to\infty}(e^{2mx}-e^{mx})=\lim_{x\to\infty}e^{mx}(e^{mx}-1)=\infty(\infty-1)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^{2mx}-e^{mx})=\frac{1}{e^{-2mx}}-\frac{1}{e^{-mx}}=\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}=0$$

$\boxed{y=0 \text{ خط تقارب عندما } x\to-\infty}$

4.P) النقاط القصوى للدالة

$$f'(x)=2me^{2mx}-m\cdot e^{mx}=me^{mx}(2e^{mx}-1)=0$$

$$me^{mx}\neq 0$$

لذلك $f'(x)=0$ فقط عندما يتحقق $2e^{mx}-1=0$

$$\Rightarrow 2e^{mx}=1 \Rightarrow e^{mx}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \ln e^{mx}=\ln 0.5$$

$$\Rightarrow mx=\ln 0.5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\ln 0.5}{m}} \Longrightarrow x=\frac{1}{m}\cdot\ln 0.5$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{m}\cdot\ln 2^{-1}=-1\cdot\frac{1}{m}\cdot\ln 2 \Longrightarrow \boxed{x=\frac{-\ln 2}{m}}$$

نفحص النقطة

x	$x<-\frac{\ln 2}{2}$	$-\frac{\ln 2}{m}$	$x>-\frac{\ln 2}{2}$
$f'(x)$	$+\cdot-=-$	0	$+\cdot+=+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نجد الإحداثي y للنقطة الـ min للدالة:

$$f\left(\frac{-\ln 2}{m}\right)=e^{-2\ln 2}-e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln 2^{-1}}$$

$$=2^{-2}-2^{-1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

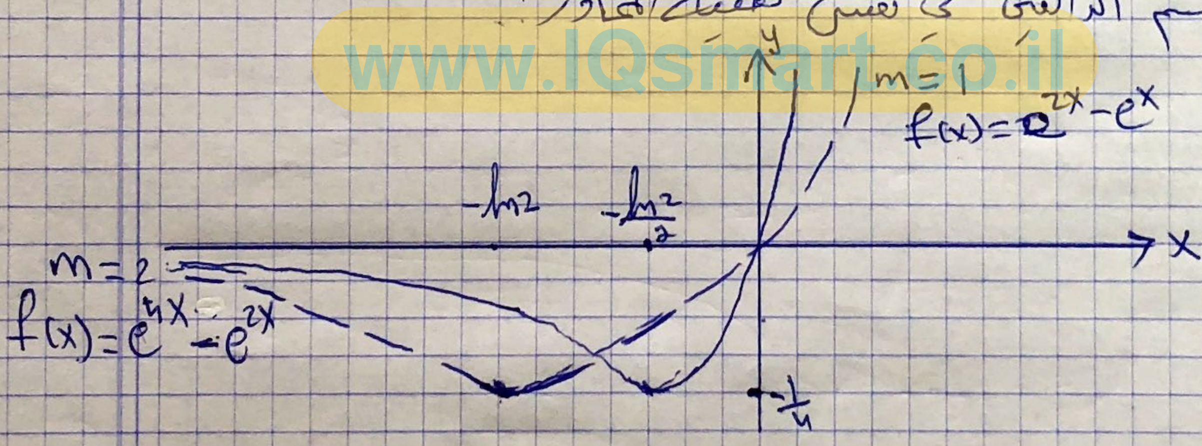
إذاً النقطة القصوى $min\left(-\frac{\ln 2}{m},-\frac{1}{4}\right)$

ب. في حال $m=1$ فالنقطة القصوى هي $min\left(-\ln 2,-\frac{1}{4}\right)$

والدالة هي: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

في حال $m=2$ النقطة القصوى: $min\left(-\frac{\ln 2}{2},-\frac{1}{4}\right)$ والدالة هي: $f(x)=e^{4x}-e^{2x}$

نرسم الدالتين في نفس هيئة المحاور:



ج. المستقيم $y=k$ الذي يمس الدالة هو مستقيم موازٍ للمحور x وبالتالي يمس الدالة في نقطة الـ min ولذلك $k=-\frac{1}{4}$

إذاً: $$S=\int_{-\frac{\ln 2}{m}}^{0}\left(e^{2mx}-e^{x}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)dx=\left[\frac{e^{2mx}}{2m}-\frac{e^{mx}}{m}+\frac{1}{4}x\right]_{-\frac{\ln 2}{m}}^{0}$$

تكملة النقطة

x		$\frac{-\ln 2}{m}$	
$f'(x)$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

نجد إحداثيات النقطة:

$$f\left(\frac{-\ln 2}{m}\right) = e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} = e^{\ln 2^{-2}} - e^{\ln 2^{-1}}$$

$$= 2^{-2} - 2^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

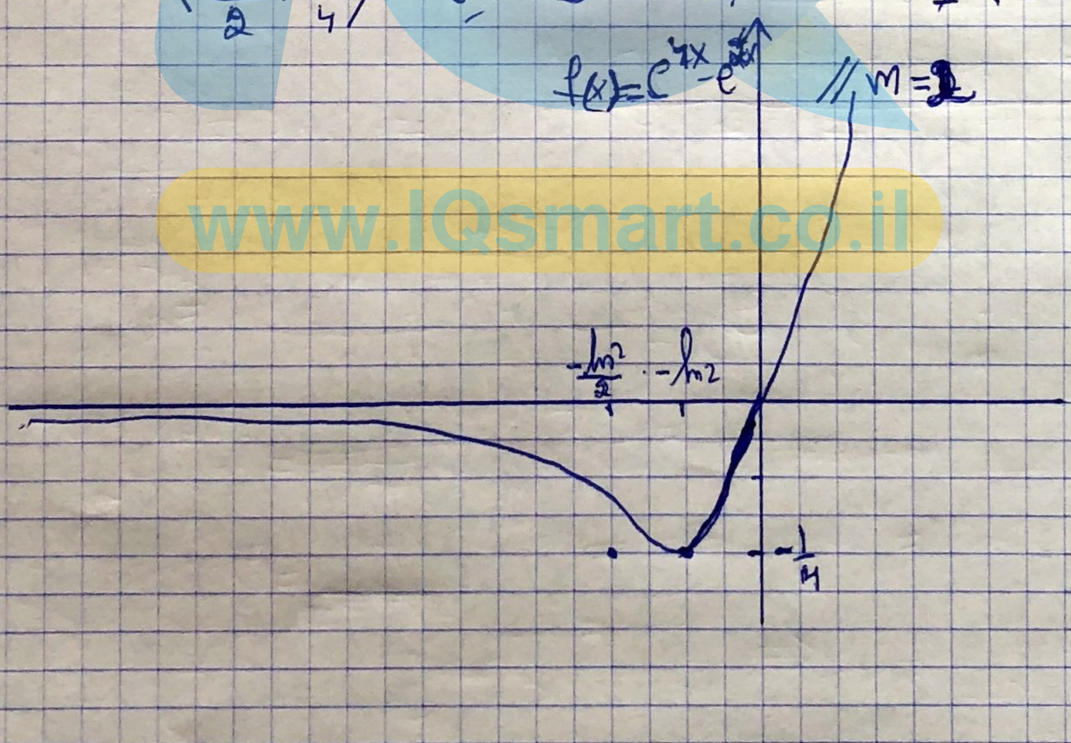
إذاً: $\min\left(\frac{-\ln 2}{m}, -\frac{1}{4}\right)$

ج. في حال $m=1$ الدالة هي $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

وإحداثيات النقطة القصوى هي: $\min\left(-\ln 2, -\frac{1}{4}\right)$

في حال $m=2$ الدالة هي $f(x)=e^{4x}-e^{2x}$

وإحداثيات النقطة القصوى هي: $\min\left(\frac{-\ln 2}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



$$=\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}-0\right)-\left(\frac{e^{-2\ln 2}}{2m}-\frac{e^{-\ln 2}}{m}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln 2}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}-\frac{0.25}{2m}+\frac{0.5}{m}+\frac{\ln 2}{4m}$$

$$=\frac{1}{2m}-\frac{1}{m}-\frac{1}{8m}+\frac{1}{2m}+\frac{\ln 2}{4m}$$

$$=\frac{4-8-1+4}{8m}+\frac{\ln 2}{4m}=\frac{-1}{8m}+\frac{\ln 2}{4m}$$

اذاً المساحة المطلوبة $\boxed{S=\frac{2\ln 2-1}{8m}}$

2 ב $\quad S_m\overset{?}{=}\frac{S_1}{m}$ لكل m

من البند السابق $\rightarrow S_1=\frac{2\ln 2-1}{8}$ بالنسبة ل $m=1$ نتحقق

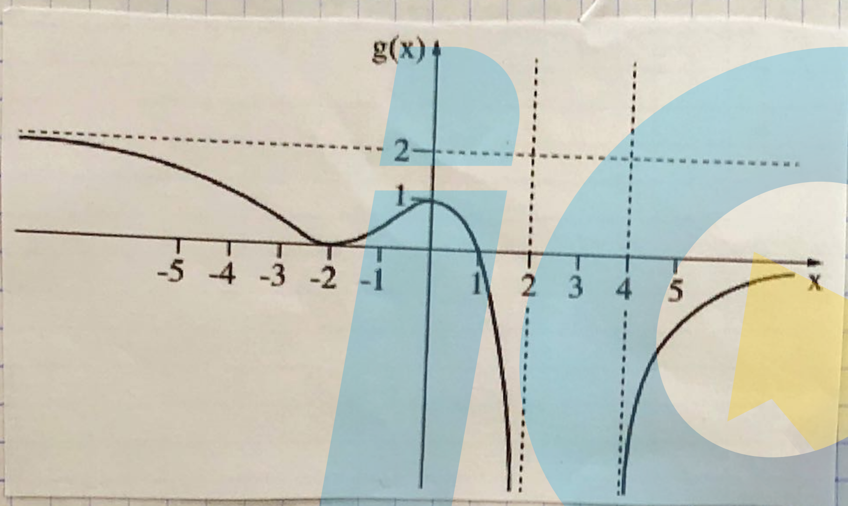
$$\frac{S_1}{m}=\frac{\frac{2\ln 2-1}{8}}{m}=\frac{2\ln 2-1}{8m}=S_m$$

اذاً $S_m=\frac{S_1}{m}$ لكل m.

حل سؤال 5

بحسب المعطيات نفهم أن:

* الدالة $f(x)$ معرفة لكل x.
* الدالة $g(x)$ معرفة كالتالي $g(x)=\ln f(x)$
* مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو $x>4$ أو $x<2$
* في المجال $2\le x\le 4$ نأخذ $f'(x)=0$ فقط في النقطة $x=3$.
* النقاط الصفرية للدالة $g(x)$ هي $x=1$, $x=-2$



أ- $g(-2)=0$ من الرسم

لذلك:

$g(-2)=\ln f(-2)=0$

$\rightarrow f(-2)=e^0=1$

$\boxed{f(-2)=1}$

$g(0)=1$

$g(0)=\ln f(0)=1$

$\rightarrow f(0)=e^1=e$

$\boxed{f(0)=e}$

$g(1)=0 \rightarrow \ln f(1)=0$

$\rightarrow f(1)=e^0=1$

$\boxed{f(1)=1}$

ب- الدالة $\ln f(x)$ معرفة لكل x تكون فيه $f(x)>0$
وبما أن $g(x)=\ln f(x)$ معرفة في المجال $x>4$ أو $x<2$
لذلك هذا هو المجال الموجب لـ $f(x)$
وبما أن $f(x)$ معرفة لكل x لذلك المجال السالب
لها هو المجال الذي فيه $g(x)$ غير معرفة أي $2<x<4$
إذاً المجال الموجب لـ f هو $x>4$ أو $x<2$
المجال السالب لـ f هو $2<x<4$

ج. الدالة $f(x)$ معرفة لكل x ولذلك بحسب البنود

السابقة استنتجنا أن: $f(0)=e$ ولذلك

التقاطع مع y سيكون بالنقطة $(0,e)$

التقاطع مع x سيكون في النقاط التي فيها للدالة $g(x)$

خطوط تقارب أي $x=2$ و $x=4$ هي نقط صفرية لـ f.

لأنه عندها سيتحقق:-

$g(2)=\ln f(2)=\ln 0 \longrightarrow$ غير معرف

$g(4)=\ln f(4)=\ln 0 \longrightarrow$ غير معرف

وبالتالي نقاط التقاطع مع x هي $(2,0)$ $(4,0)$

د) بحسب رسم الدالة g يتحقق:-

$\lim_{x\to-\infty} \ln f(x)=2$ خط التقارب الأفقي لـ g $x\to-\infty$

$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=e^2 \Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} y=e^2 \\ x\to-\infty \end{matrix}}$ خط تقارب للدالة f في $x\to-\infty$

بنفس الأسلوب - خط التقارب الأفقي للدالة $g(x)$ عندما $x\to+\infty$ بحسب الرسم يتحقق:-

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0 \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln f(x)=0$

$\rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=e^0=1$

إذاً خط التقارب الأفقي لـ $f(x)$ عندما $x\to\infty$

هو $\boxed{\begin{matrix} y=1 \\ x\to\infty \end{matrix}}$

هـ:

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \Longrightarrow g'(x)\cdot f(x)=f'(x)$$

اي انه اشارة $f'(x)$ تحدد حسب اشارة حاصل ضرب $f(x)$ بـ $g'(x)$

من البند (ب) استنتجنا ان:

المجالات الموجبة لـ $f(x)$ هي $x>4$ أو $x<2$

المجالات السالبة لـ $f(x)$ هي $2<x<4$

وبحسب الرسم البياني للمشتقة $g'(x)$:

المجال الموجب لـ $g'(x)$ هو: $x<-2$ أو $-2<x<1$ أ

المجال السالب لـ $g'(x)$ هو: $1<x<2$ أو $x>4$

النقاط الصفرية لـ g' هي $x=-2$ // $x=1$

النقاط الصفرية لـ f هي $(2,0)$ // $(4,0)$

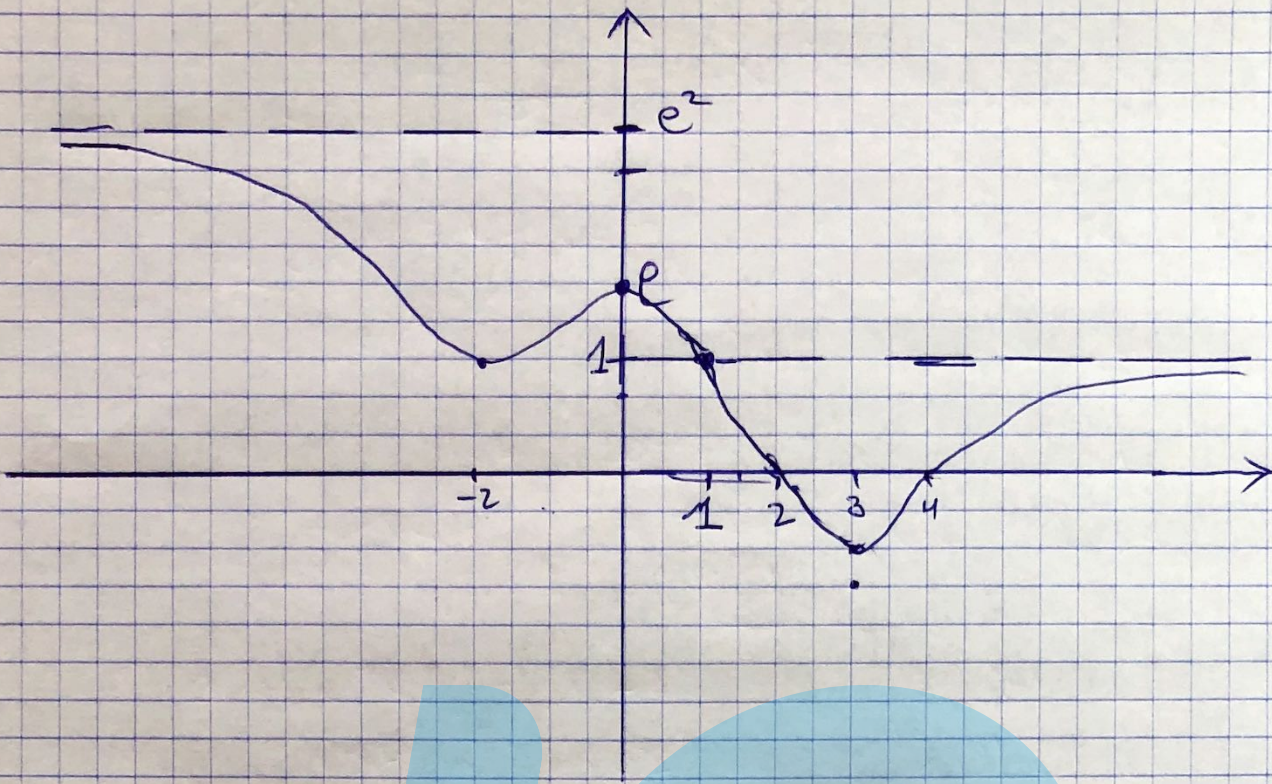
ومن معطيات السؤال $x=3$ هي النقطة الصفرية الوحيدة لـ $f'(x)$

وبالتالي نبني جدول بحسب المجالات الموجبة والسالبة والنقاط الصفرية ونفحص اشارات الدوال هناك بحسب التحليل السابق:

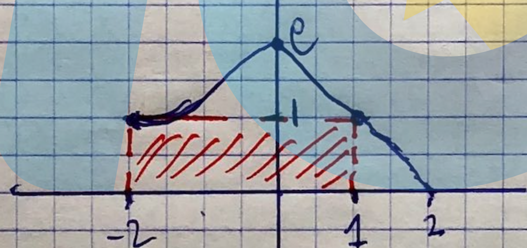
x		-2		0		2		3		4	
g	↘	min	↗	max	↘	$\emptyset$	←$\emptyset$→	$\emptyset$	←$\emptyset$	$\emptyset$	↗
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	$\emptyset$	←$\emptyset$→	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$+$
f	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'\cdot f=f'$	$(+\cdot-)$ $-$	0	$+$	0	$-$			0			$+$
f	↘	min	↗	max	↘	0	↘	min	~~min~~ ↗		↗

بما أن $f'(3)=0$ والدالة $f(x)$ في المجال $0<x<2$ موجبة وفي $2<x<3$ سالبة اي ان $f(x)$ تنتقل من سالبة الى موجبة. ومن ثم في المجال $3<x<4$ سالبة لذلك $x=3$ min لـ f وبالتالي في المجال $3<x<4$ f تصاعدية

و



أ) نرسم الدالة $f(x)$ في المجال $-2\le x\le 1$ ونشرح بواسطته $\int_{-2}^{1} f(x)dx$



مساحة المستطيل المخطط هي $3\cdot 1=3$

بما ان الدالة موجبة في المجال $-2\le x\le 1$ لذلك $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

يعبر عن المساحة بين الدالة والمحور x في هذا المجال

وبما انه بحسب الرسم المساحة أكبر من المستطيل المخطط

لذلك $\int_{-2}^{1} f(x)dx>3$