حل نموذج بجروت

(807) 582

موعد صيف (ب)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 4

(أ) معادلة القطع المكافئ $y^2=2ax$

معادلة الدائرة $x^2+y^2-2ax-2x=0$

تقاطع القطع المكافئ مع الدائرة يحقق:-

$x^2+2ax-2ax-2x=0$

$x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=2}$

نجد y:

$y^2=2ax$

$x=0 \rightarrow y^2=0 \rightarrow \boxed{y=0}$ $\boxed{(0,0)}$

$x=2 \Rightarrow y^2=2\cdot a\cdot 2 \longrightarrow y^2=4a$

$y_1=\sqrt{4a}$ $y_2=-\sqrt{4a}$

$y_1=2\sqrt{a}$ $y_2=-2\sqrt{a}$

$\boxed{(2,2\sqrt{a})}$ $\boxed{(2,-2\sqrt{a})}$

اذا نقاط تقاطع الدائرة والقطع المكافئ هي:

$\boxed{(0,0),(2,2\sqrt{a}),(2,-2\sqrt{a})}$

(ب) ميل المستقيم يكون موجب بين النقاط $(0,0)$ و $(2,\sqrt{2}a)$

لأن a موجب، وهذا الميل هو

$m=\frac{\sqrt{2}a-0}{2-0}=\frac{2\sqrt{a}}{2}=\sqrt{a}$

ومعادلة المستقيم هي:

$\boxed{y=\sqrt{a}x}$

ج 1. معادلة الدائرة هي

$$x^2+y^2-2ax-2x=0$$

نكمل الى مربع كامل:

$$\underbrace{x^2-2x(a+1)+\boxed{(a+1)^2}}+y^2=0$$

$$(x-(a+1))^2+(y-0)^2=(a+1)^2$$

اذا الدائرة المعطاة مركزها هو

$$((a+1),0)$$

ونصف قطرها هو $R=a+1$

ج 2. بحسب المعطى طول العمود النازل من مركز الدائرة على المستقيم الذي وجدنا معادلته سابقاً هو $2\sqrt{5}$.
عملياً طول العمود هو بعد النقطة $((a+1),0)$ عن المستقيم $y=\sqrt{a}x$. $\Leftarrow (\sqrt{a}x-y=0)$.
حسب قانون بعد نقطة عن مستقيم يتحقق:

$$2\sqrt{5}=\frac{|\sqrt{a}(a+1)-0|}{\sqrt{(\sqrt{a})^2+1^2}}$$

$$2\sqrt{5}=\frac{|\sqrt{a}(a+1)|}{\sqrt{a+1}} \xrightarrow{(\ )^2} \overbrace{(2\sqrt{5})^2}^{20}=\frac{(\sqrt{a})^2\cdot(a+1)^2}{a+1}$$

$$\Rightarrow 20=\frac{a\cdot(a+1)^2}{a+1} \Rightarrow a(a+1)=20$$

$$\Rightarrow a^2+a-20=0$$

نحل المعادلة حسب الدستور

$$\Rightarrow \boxed{a_1=4} \qquad a_2=-5 \ \times$$

لأن a موجب

اذاً $\boxed{a=4}$

د. بما ان $a=4$ اذا مركز الدائرة هو $(5,0)$ و $R=5$

الدائرة الجديدة مركزها $\boxed{(5,0)}$ ونصف قطرها $r=5-2=3$

$\boxed{r=3}$

معادلة الدائرة الجديدة هي :

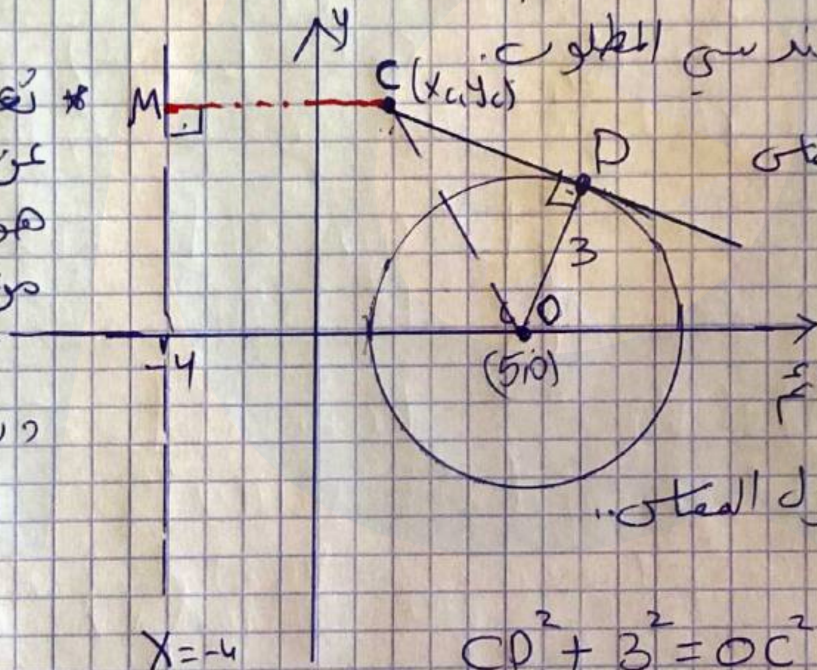
$$(x-5)^2+y^2=3^2 \Rightarrow \boxed{(x-5)^2+y^2=9}$$

نبحث عن المحل الهندسي لكل النقاط التي طول المماس المرسوم منها للدائرة الجديدة مساوٍ لبعد النقطة عن المستقيم $x=-4$.

بما أن المماس عمودياً على نصف القطر لذلك الزاوية بين نصف القطر والمماس المرسوم من النقطة هي 90

توضيح الوضع بواسطة رسم تقريبي:

نفرض أن النقطة $C:(x_c,y_c)$ تحقق الشرط وتقع على المحل الهندسي المطلوب.



* بُعد النقطة C عن المستقيم $x=-4$ هو العمود النازل من C على المستقيم أي CM وتحقق

$CM = x_c-(-4)$

$\boxed{CM = x_c+4}$

D نقطة التماس

$r = OD = 3$

$\measuredangle D = 90°$

$\triangle OCD$ قائم

CD هو طول المماس.

وتحقق

$CD^2+3^2=OC^2$

$CD^2 = OC^2-9 \Rightarrow \boxed{CD=\sqrt{OC^2-9}}$

نبحث عن كل النقاط التي تحقق أن $CM=CD$!

$$CD=\sqrt{OC^2-9} = \sqrt{(x_c-5)^2+(y_c-0)^2-9}$$

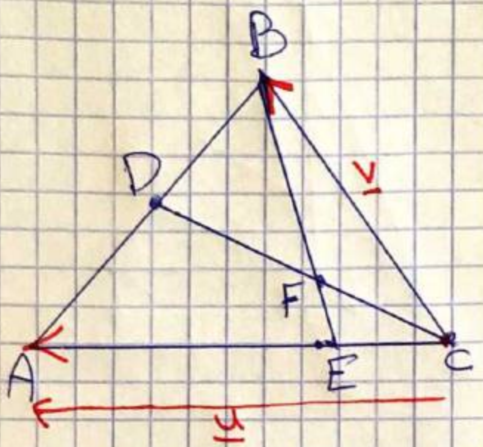
$$CD=\sqrt{(x_c-5)^2+y_c^2-9} \Rightarrow \boxed{CM=CD}$$

$$\Rightarrow (x_c+4) = \sqrt{(x_c-5)^2+y_c^2-9} \xRightarrow{()^2} (x_c+4)^2 = (x_c-5)^2+y_c^2-9$$

$$\cancel{x_c^2}+8x_c+16 = \cancel{x_c^2}-10x_c+25+y_c^2-9 \Rightarrow y_c^2 = 8x_c+10x_c+\cancel{16+9-25}$$

$\boxed{y^2=18x}$ معادلة المحل الهندسي المطلوب.

حل سؤال 2 :



بحسب المعطيات D منتصف AB

E تقسم AC بنسبة $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$

وبالتالي $\vec{CE}=\frac{1}{3}\vec{CA}$ و $\vec{EA}=\frac{2}{3}\vec{CA}$

$\vec{CF}=\cancel{k}\cdot\vec{CD}\ ,\ \vec{BF}=t\cdot\vec{BE}$

$$\vec{BF}=t\vec{BE}=t(\vec{BC}+\vec{CE})=t(-\underline{v}+\tfrac{1}{3}\underline{u})$$

$$① \quad \boxed{\vec{BF}=-t\underline{v}+\frac{t}{3}\underline{u}}$$

من جهة اخرى يمكننا التعبير عن $\vec{BF}$ كالتالي :-

$$\vec{BF}=\vec{BC}+\vec{CF}=-\underline{v}+k\cdot\vec{CD}$$

$$\vec{CD}=\vec{CB}+\vec{BD}$$

$$\vec{BD}=-\frac{1}{2}\vec{AB}=\frac{1}{2}(\underbrace{\vec{BC}}_{-v}+\underbrace{\vec{CA}}_{+u})$$

$$\vec{BD}=-\frac{1}{2}(\underline{u}-\underline{v})=-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

وبالتالي:

$$\vec{CD}=-\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\vec{CD}=\frac{1}{2}\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\vec{BF}=-\underline{v}+k(\tfrac{1}{2}\underline{v}-\tfrac{1}{2}\underline{u})=-\underline{v}+\frac{k}{2}\underline{v}-\frac{k}{2}\underline{u}$$

$$② \quad \boxed{\vec{BF}=(\frac{k}{2}-1)\cdot\underline{v}-\frac{k}{2}\underline{u}}$$

انا عبرنا عن $\vec{BF}$ بطريقتين وبما انه يجب ان تكون طريقتي التعبير عن نفس المتجه متطابقه بسبب ([illegible])

اذاً يجب أن يتحقق : المعاملات المضروبه ب $\underline{u}$ و $\underline{v}$ متساويه

اي: $-t\cdot\underline{v}+\frac{t}{3}\cdot\underline{u}=(\frac{K}{2}-1)\cdot\underline{v}-\frac{1}{2}\underline{u}$

$$\begin{cases}-\frac{K}{2}=\frac{t}{3}\\ \frac{K}{2}-1=-t\end{cases}$$

نحل معادلتين بمتغيرين

$\boxed{t=\frac{3}{4}}$ $\boxed{K=\frac{1}{2}}$

ب- بحسب المعطيات فإن معادلة المستوى الذي يقع فيه المثلث ABC هي: $4x+2y+z-12=0$

بحيث A نقطة تقاطع المستوى مع المحور x $\Leftarrow A:(x_A,0,0)$

C " " " " y $\Leftarrow C:(0,y_C,0)$

B " " " " z $\Leftarrow B:(0,0,z_B)$

نعوض في معادلة المستوى ونجد احداثيات كل واحدة من النقاط:

$$A: \rightarrow 4x_A+0+0-12=0 \Rightarrow x_A=3 \Rightarrow A(3,0,0)$$

$$C: \rightarrow 0+2y_C+0-12=0 \Rightarrow 2y_C=12,\ y_C=6 \Rightarrow C:(0,6,0)$$

$$B \rightarrow 0+0+z_B-12=0 \Rightarrow z_B=12 \Rightarrow B(0,0,12)$$

نجد احداثيات E ← النقطة E تقسم AC بنسبة $1:2$

لذلك

$A(3,0,0)$ — 2 — E — 1 — $C(0,6,0)$

$$x_E=\frac{2x_C+x_A}{1+2}=\frac{0+3}{3}=1$$

$$y_E=\frac{2y_C+y_A}{1+2}=\frac{2\cdot 6+0}{3}=4$$

$$z_E=\frac{2z_C+2z_A}{3}=0 \Rightarrow \boxed{E:(1,4,0)}$$

$$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$$

$F(x_F,y_F,z_F)$

$B(0,0,12)$

$E(1,4,0)$

$$F-B=\frac{3}{4}(E-B)$$

$$x_F-0=\frac{3}{4}(1-0) \Rightarrow \boxed{x_F=\frac{3}{4}}$$

$$y_F-0=\frac{3}{4}(4-0) \Rightarrow \boxed{y_F=3}$$

$$z_F-12=\frac{3}{4}(0-12) \Rightarrow \boxed{z_F=3}$$

$$\Rightarrow \boxed{F\left(\frac{3}{4},3,3\right)}$$

$\overrightarrow{OA} = (3,0,0)$ $O(0,0,0)$

$\overrightarrow{OE} = (1,4,0)$ $A(3,0,0)$

$E(1,4,0)$

المتجهان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OE}$ يفرشان المستوى OAE

نجد متجه (a,b,c) يتعامد المتجهين الذين يفرشان المستوى:

$(a,b,c)(3,0,0) = 0 \rightarrow 3a = 0 \rightarrow \boxed{a=0}$

$(a,b,c)(1,4,0) = 0 \rightarrow a+4b = 0 \rightarrow 0+4b = 0$

$\boxed{b=0}$

اذاً المتجه الذي يعامد المستوى هو $(0,0,1)$

وبما ان المستوى يمر بـ $(0,0,0)$ اذاً $d=0$

وبالتالي نعوض في الصورة العامة للمستوى

$ax+by+cz+d=0$

ونحصل على:

$\boxed{z=0} \leftarrow 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z + 0 = 0$

اذاً معادلة المستوى OAE هي

$\boxed{z=0}$

د. حجم الهرم FOAE يساوي: $\dfrac{\text{مساحة القاعدة OAE} * \text{الارتفاع}}{3}$

مساحة المثلث $OAE = \dfrac{OA\cdot OE(\sin\alpha)}{2}$ (α الزاوية بين OE و OA)

$|\overrightarrow{OE}| = \sqrt{1^2+4^2+0^2} = \sqrt{17}$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$

نجد α: الزاوية α تحقق:

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OE}|} = \dfrac{(3,0,0)(1,4,0)}{3\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{3\sqrt{17}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \longrightarrow \boxed{\alpha = 75.96}$

$S_{\triangle AOE} = \dfrac{3\sqrt{17}\sin 75.96}{2} = \boxed{6} \Rightarrow \boxed{S_{\triangle AOE} = 6}$

الارتفاع هو بُعد النقطة F عن المستوى OAE

$$h = \frac{|0+0+3\cdot 1|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \cdot (\text{مساحة القاعدة}) \cdot (\text{الارتفاع})$$

$$V = \frac{1}{3}\, 6 \cdot 3 = 6$$

$$\boxed{V_{FAOE} = 6}$$

حل سؤال 3

$$z^4-2z^2+4=0$$

نفرض $z^2=t$ تصبح المعادلة

$$t^2-2t+4=0$$

نحل حسب الدستورة

$$t_{1,2}=\frac{2\mp\sqrt{4-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{2\mp\sqrt{-12}}{2}$$

$$\sqrt{-12}=\sqrt{-1\cdot12}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{12}=i\cdot\sqrt{12}=i\cdot2\cdot\sqrt{3}$$

نعوض في الدستور مكان $\sqrt{-12}$ ونحصل على :-

$$t_{1,2}=\frac{2\mp2\sqrt{3}\cdot i}{2}$$

$t_1=1+\sqrt{3}\,i$ $\qquad$ $t_2=1-\sqrt{3}\,i$

نعوض ونجد z :

$z^2=1+\sqrt{3}\,i$ $\qquad$ $z^2=1-\sqrt{3}\,i$

$1+\sqrt{3}i=2\operatorname{cis}60$ $\qquad$ $1-\sqrt{3}\,i=2\operatorname{cis}300$

$z^2=2\operatorname{cis}60$ $\qquad$ $z^2=2\operatorname{cis}300$

$z_k=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{60}{2}+\frac{\overset{180}{360}}{2}k\right)$ $\qquad$ $z_k=\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\left(\frac{300}{2}+\frac{\overset{180}{360}k}{2}\right)$ دمج ضمع

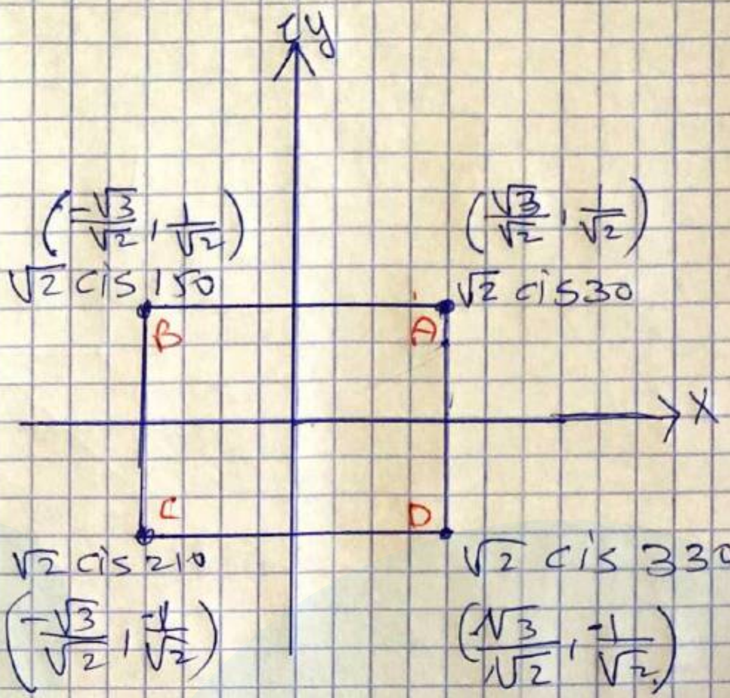
$k=0\quad z_1=\sqrt{2}\operatorname{cis}30$ $\qquad$ $k=0\rightarrow z_1=\sqrt{2}\operatorname{cis}150$

$k=1\quad z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}210$ $\qquad$ $k=1\rightarrow z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}330$

اذا للمعادلة $z^4-2z^2+4=0$ يوجد 4 حلول :

$$\boxed{\begin{array}{l}
z_1=\sqrt{2}\operatorname{cis}30\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\\
z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}150\longrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\\
z_3=\sqrt{2}\operatorname{cis}210\longrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\\
z_4=\sqrt{2}\operatorname{cis}330\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}
\end{array}}$$

ب- نرسم المضلع الذي يعبر عن حلول المعادلة



الشكل الرباعي الذي يعبر عن الحلول هو مستطيل
مساحته هي $AB \cdot AD$

$$AB = \frac{\sqrt3}{\sqrt2} - \left(\frac{-\sqrt3}{\sqrt2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt2}\right) = \sqrt2\cdot\sqrt3 = \sqrt6$$

$$AB = \sqrt6$$

$$AD = \frac{1}{\sqrt2} - \left(\frac{-1}{\sqrt2}\right) = \frac{2}{\sqrt2} = \sqrt2$$

مساحة المستطيل هي $\sqrt2\cdot\sqrt6 \Leftarrow \sqrt{12} \Leftarrow \boxed{2\sqrt3}$

ج- نحسب المعطى $(az^2+b)(z+1)=0$
بحيث حلان من حلول المعادلة هما عددان وهميان, اي
من الصورة mi.
حلول المعادلة تحقق: $z+1=0$ او $az^2+b=0$
$\boxed{z=-1}$ صحيح او $z^2 = \frac{-b}{a}$

وبالتالي الحلول الوهمية هي التي تحقق ان $z^2 = \frac{-b}{a}$

نفرض $z = x+iy$ اذا يتحقق :-
x,y اعداد حقيقية.

$$(x+yi)^2 = -\frac{b}{a}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -\frac{b}{a}$$

بما ان الحلول اعداد وهمية من الصورة mi
ان المركب الحقيقي في العدد z هو 0 أي $x=0$
نعوض $x=0$ في المعادلة التي توصلنا لها نحصل على:

$$0 - y^2 + 2\cdot 0yi = -\frac{b}{a} \Longrightarrow -y^2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{b}{a}}$$

وهذا معناه ان $\frac{b}{a} > 0$ لان y^2 مقدار موجب دائماً.

وهذا معناه ان اما a و b موجبان او a و b سالبان
وفي الحالتين :- $a \cdot b > 0$.

د. بحسب نتائج البند السابق يتحقق :- $y^2 = \frac{b}{a}$

$$\Longrightarrow y = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{او} \quad y = -\sqrt{\frac{b}{a}}$$

وبالتالي حلول المعادلة $(az^2+b)(z+1) = 0$
هي: $z = 1$ // $z = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot i$ // $z = -\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot i$

هـ. القيمة المطلقة لحلول المعادلة I هي $\sqrt{2}$ وبالتالي نصف قطر الدائرة هو $2\sqrt{2}$ وبالتالي معادلة الدائرة هي من الصورة

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 8$$

نقاط تقاطع هذه الدائرة مع المحور iy $(x=0)$ هي $\sqrt{8}$ و $-\sqrt{8}$
وهذه النقاط هي حلول المعادلة II لانها وهمية وتقع على الدائرة وبالتالي يتحقق :

$$\boxed{\frac{b}{a} = 8} \Leftarrow \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{8}$$

حل سؤال 4

$$f(x)=e^{(bx^2-2bx)}-1 \qquad b<0$$

أ. تقاطع مع المحاور

مع $x \leftarrow y=0$

$$0=e^{bx^2-2bx}-1$$

$$1=e^{bx^2-2bx} \rightarrow e^0=e^{bx^2-2bx}$$

$$\rightarrow 0=bx^2-2bx \rightarrow 0=bx(x-2)$$

$\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=2}$

أ-2 خطوط التقارب

$$\lim_{x\to\infty} e^{b(x^2-2x)}-1=e^{-\infty}-1=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{b(x^2-2x)}-1=e^{-\infty}-1=-1$$

$y=-1$ خط تقارب افقي

خطوط تقارب عمودية لا يوجد لأن الدالة معرفة لكل x

ب. $f'(x)=(2bx-2b)\cdot e^{bx^2-2bx}$

$$f'(x)=0 \longrightarrow 2bx-2b=0 \longrightarrow \boxed{x=1}$$

فحص النقطة

نفحص اشارة المشتقة في جوار النقطة $x=1$

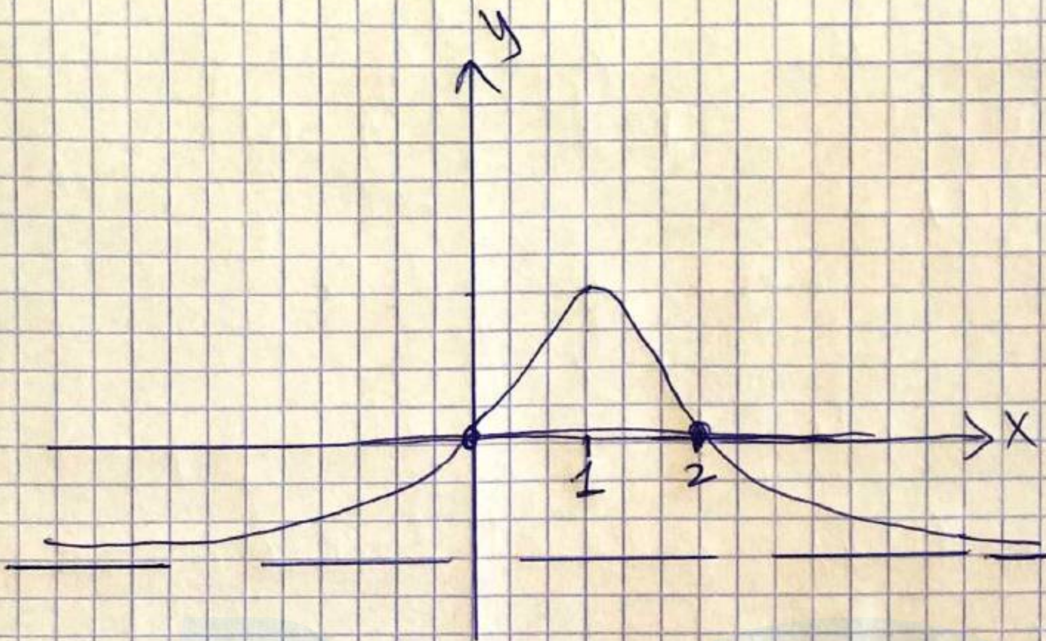
$$f'(0)=(2b\cdot0-2b)\,e^{b\cdot0^2-2b\cdot0}=-2\underset{\text{سالب}}{b}>0$$

$$f'(2)=(2b\cdot2-2b)\cdot e^{b\cdot2^2-2b\cdot2}=2\underset{-}{b}\cdot\underset{+}{e^{\square}}<0$$

اذن F, $x=1$ نق' מקסימום, نعوض y

$$f(1)=e^{b\cdot1^2-2b\cdot1}-1=e^{-b}-1 \Longrightarrow \boxed{(1,\ e^{-b}-1)\ \text{max}}$$

4.P



1.ج $g(x) = f(x+a)$

$g(x)$ هي ازاحة افقية للدالة f وبما أن للدالة g يوجد نقطة قصوى تقع على المحور y اذاً الازاحة هي وحدة واحدة الى اليسار ولذلك $\boxed{a=1}$

اي يتحقق: $g(x) = f(x+1)$

نعبر عن $g(x)$ جبرياً:

$$g(x) = f(x+1) = e^{[b(x+1)^2 - 2b(x+1)]} - 1$$

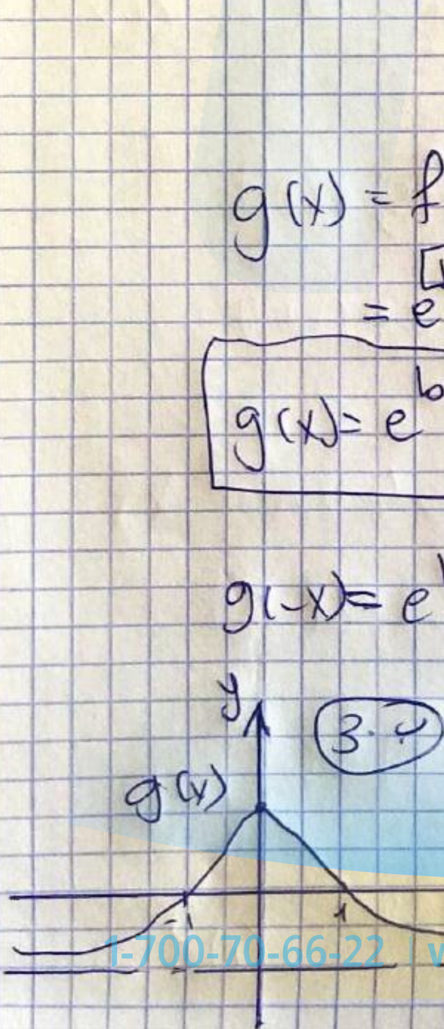
$$= e^{[b(x+1)(x+1-2)]} - 1 = e^{b(x+1)(x-1)} - 1$$

$$\boxed{g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1}$$

2. $g(-x) = e^{b((-x)^2-1)} - 1 = e^{b(x^2-1)} - 1 = g(x)$

اذاً زوجية

3.ب



طريقة اخرى: بما أن $g(x)$ ازاحة لـ f وحدة واحدة الى اليسار

سيصبح رسم البياني متماثل بالنسبة لمحور y كما فيين وبالتالي زوجية.

$$g(x) = e^{b(x^2-1)} - 1$$

$$g'(x) = b(2x)\cdot e^{b(x^2-1)} = 2bx\cdot e^{b(x^2-1)}$$

$$g''(x) = 2b\cdot e^{b(x^2-1)} + 2bx\cdot 2bx\cdot e^{b(x^2-1)}$$

$$g''(x) = \underbrace{2b\cdot e^{b(x^2-1)}}_{\text{تعبير لن يساوي صفر}}\left[1+2bx^2\right]$$

$$g''(x) = 0 \implies 1+2bx^2 = 0 \implies x^2 = -\frac{1}{2b}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-1}{2b}} \quad (b<0)$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{-1}{2b}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-1}{2b}}$$

نجد اشارة المشتقة الثانية ونضيف النقاط

نلاحظ ان التعبير $2b\cdot e^{(x^2-1)}$ بالمشتقة الثانية دائما سالب

x	$x=-\sqrt{\frac{-1}{b}}$	$-\sqrt{\frac{-1}{2b}}$	$x=0$	$\sqrt{\frac{-1}{2b}}$	$x=\sqrt{\frac{-1}{b}}$
$g''(x)$	$+$	0	$-$		
$g'(x)$	↗	max	↘	min	↗

$$g''(x) = \underbrace{2b\,e^{b(x^2-1)}}_{\substack{\text{سالب} \\ \text{دائما} \\ 0>b}}\cdot\left[1+2bx^2\right]$$

$$g''\left(-\sqrt{\frac{-1}{b}}\right) = -\left[1+2\cdot b\left(\frac{-1}{b}\right)^2\right] = \left(\underbrace{1+\frac{2}{b}}_{\text{موجب}}\right) \to g''\left(-\sqrt{\frac{-1}{b}}\right) + \cancel{>}\, 0$$

$$g''(0) = -\left[1+0\right] < 0$$

$$g''\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = -\left[\cancel{1}+2b\left(\frac{1}{b}\right)^2\right] > 0$$

$$\implies \quad x = -\sqrt{\frac{-1}{2b}}\ \text{max} \qquad x = \sqrt{\frac{-1}{2b}}\ \text{min}$$

ד) نعوض $b=0.5$ اذا النقاط الفصول لـ $g'(x)$ هي:

$$x_1=-\sqrt{\frac{1}{2b}}=-\sqrt{\frac{1}{2(0.5)}}=-\sqrt{\frac{1}{1}}=-1$$

$$x_2=\sqrt{\frac{1}{2b}}=\sqrt{\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}}=\sqrt{1}=1$$

بما أن $g(x)$ فردية لذلك الدالة $g'(x)$ متماثلة بالنسبة لنقطة الاصل $(0,0)$ وبالتالي المساحة بين الدالة والمحور x والمستقيمات التي تمر عبر النقاط القصوى عبارة عن مساحتين متماثلتين ومتساويتين في المجالات $-1\leq x<0$ و $0\leq x\leq 1$

وبالتالي المساحة هي:

$$S=\left|2\int_0^1 g'(x)\,dx\right|$$

$$S=\left|2\left[g(x)\right]_0^1\right|$$

$$S=2\left|\left[g(1)-g(0)\right]\right|$$

$$=2\left|0-(e^{-\frac{1}{2}}-1)\right|=2\cdot(e^{\frac{1}{2}}-1)$$

$$\boxed{=2(\sqrt{e}-1)\cong 1.297}$$

* ملاحظة: بحسب الرسم البياني لـ g فإن g' موجبة في المجال $-1\leq x<0$ لان g تصاعدية في ذلك المجال وسالبة في المجال $0\leq x\leq 1$.

$$b=\frac{1}{2}\rightarrow \boxed{g(x)=e^{0.5x^2-\frac{1}{2}}-1}$$

$$g(1)=e^{0.5-\frac{1}{2}}-1$$
$$g(1)=1-1=0$$
$$g(0)=e^{0-\frac{1}{2}}-1$$
$$g(0)=e^{-\frac{1}{2}}-1$$

حل سؤال 5

$$f(x)=ax^2-x^3$$

.1.أ

الدالة f معرفة لكل x , $a>0$ براميتر

المجال الموجب ل f(x)

$$f(x)>0$$

$$ax^2-x^3>0 \Rightarrow x^2(a-x)>0$$

x^2 موجب دائماً $\quad a-x>0$

$$a>x$$

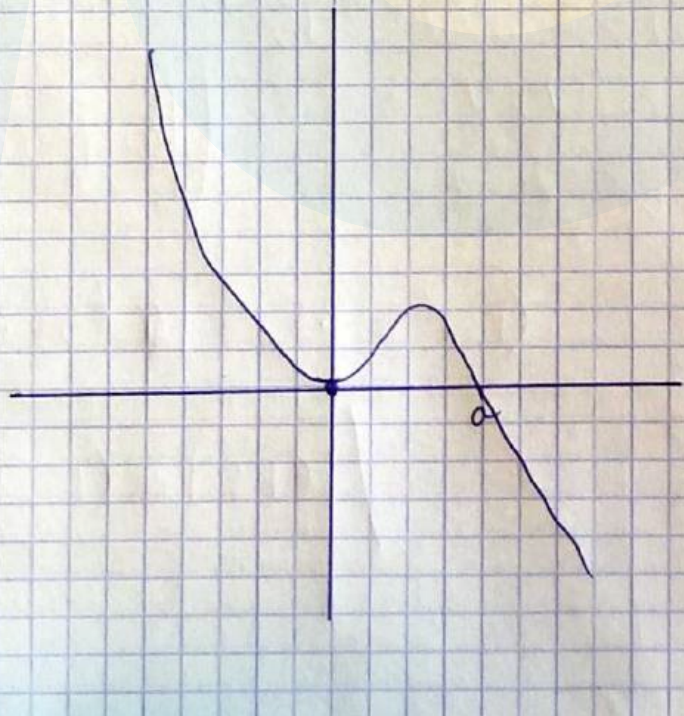
اذاً : $x<a$ هو المجال الموجب ل f(x) بحيث $x\neq 0$

ويمكن كتابته كتالي $\boxed{0<x<a \text{ او } x<0}$

وواضح ان المجال السالب ل f(x) هو $\boxed{x>a}$

* النقاط الصفرية ل f(x) هي $\boxed{x=a}$ او $\boxed{x=0}$

.2.أ



$g(x) = \ln[f(x)]$.ב

الدالة $g(x)$ معرفة لكل x يحقق ان $f(x)>0$
حسب رسم $f(x)$ فإن المجال الموجب ل $f(x)$
هو $0<x<a$ أو $x<0$

ب2. خطوط التقارب العمودية هي اطراف مجال التعريف
$\boxed{x=0}$ أو $\boxed{x=a}$

لا يوجد خطوط تقارب افقية لأنه:-
$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \Rightarrow +\infty$
$\ln f(x) = \ln \infty \to \infty$

ب.3. $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2ax-3x^2}{ax^2-x^3}$

$g'(x)=0 \Rightarrow 2ax-3x^2=0$
$x(2a-3x)=0$
$x=0$ أو $2a-3x=0$ $\quad 2a=3x$
غير معرفة الدالة
$\boxed{\frac{2a}{3}=x}$

بما ان $f(x)$ موجبة دائماً في مجال تعريف $g(x)$
لذلك اشارة المشتقة الثانية ل $g(x)$ تحدد حسب مشتقة
البسط في المقطع الثالث.
$g''(البسط) = 2a-6x$

$g''\left(\frac{2a}{3}\right) = 2a-6\left(\frac{2a}{3}\right) = 2a-4a = -2a < 0$

إذاً $x=\frac{2a}{3}$ - نقطة max

نجد الاحداثي y للنقطة القصوى

$$g\left(\frac{2a}{3}\right) = \ln\left(a\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a}{3}\right)^3\right) = \ln\left(\frac{4a^3}{9} - \frac{8a^3}{27}\right)$$

$$g\left(\frac{2a}{3}\right) = \ln\left(\frac{12a^3-8a^3}{27}\right) = \ln\left(\frac{4a^3}{27}\right)$$

إذاً النقطة القصوى هي:

$\left(\frac{2a}{3}, \ln\frac{4a^3}{27}\right)$ מקסימום.

ج) بحسب المعطى للدالة $g(x)$ يوجد نقطة تقاطع واحدة فقط مع المحور X. نقطة التقاطع هذه تحقق:

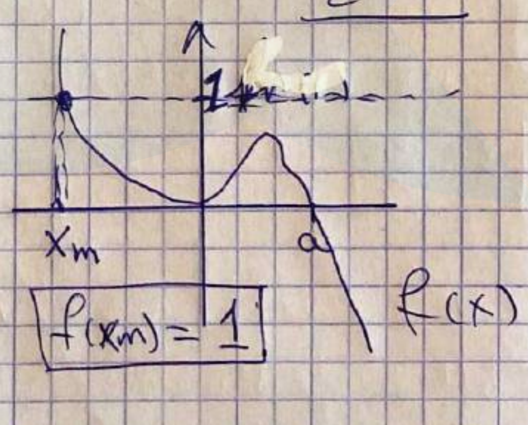
$$g(x)=\ln f(x) = 0$$

وهذا معناه ان $\ln(1)=0$

وبالتالي $f(x)=1$ في نقطة واحدة فقط في مجال تعريف g

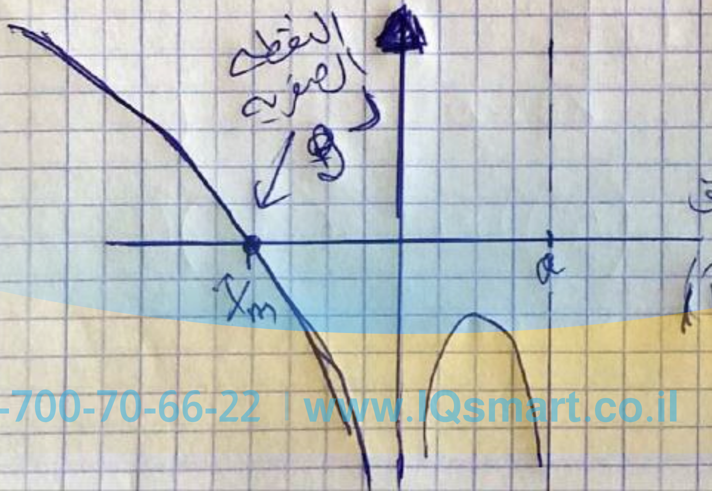
وبحسب رسم $f(x)$ ومجال تعريف $g(x)$ فإن هذه النقطة ستكون في المجال $X<0$

توضيح



في المجال السالب لـ $f(x)$ هنالك نقطة واحدة تحقق ان $f(x)=1 \Leftarrow g(x)=0$ وهي X_m ولا يوجد نقطة غيرها ونستنتج ان الاحداثي y للنقطة القصوى لـ f اصغر من 1..

رسم $g(x)$



شرح:

في المجال $0<X<a$ يتحقق

$$0<f(x)<1$$

(بحسب ما شرحنا سابقًا)

ولذلك $g(X)=\ln f(x)<0$

2.ج

حسب الشرح في البند السابق g(x) سالبة في المجال $0 \le x < a$ وهنا يضمن ان تكون للدالة g(x) نقطة صفرية واحدة ونستنتج من ذلك ان الاحداثي y للنقطة القصوى لـ f(x) يجب ان يكون اصغر من 1 وموجب اي يجب ان يتحقق :-

$$\underbrace{\ln\left(\frac{4a^3}{27}\right)}_{\text{الاحداثي } y \text{ للنقطة القصوى لـ } f} < \ln 1$$

$$\Rightarrow \frac{4a^3}{27} < 1 \Rightarrow a^3 < \frac{27}{4} \Rightarrow a < \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \boxed{1.889}$$

وبالتالي وبما ان $a > 0$ حسب معطيات السؤال اذاً مجال القيم الملائمة لـ a هو

$$\boxed{0 < a < 1.889}$$

د. $a = 0 \longleftarrow f(x) = -x^3$

$$g(x) = \ln(-x^3)$$

مجال تعريف الدالة g(x) هو $x < 0$ $\quad (-x^3 > 0)$

ويتحقق ان $\ln(-1) = 0$ اي $(-1, 0)$ نقطة تقاطع مع x

والرسم البياني للدالة g(x):