حل نموذج بجروت

(807) 582

موعد مُتعدرين

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1 :

(1.P) بحسب المعطيات النقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ تقعان على القطع المكافئ $y^2=36x$

وبالتالي يتحقق:

$$y_1^2=36x_1 \Rightarrow x_1=\frac{36}{y_1^2}$$

$$y_2^2=36x_2 \Rightarrow x_2=\frac{36}{y_1^2}$$

ميل الوتر AB يتحقق:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{36}{y_2^2}-\frac{36}{y_1^2}}=\frac{36(y_2-y_1)}{y_2^2-y_1^2}$$

$$=\frac{36\cancel{(y_2-y_1)}}{\cancel{(y_2-y_1)}(y_2+y_1)}=\frac{36}{y_2+y_1}$$

$$\boxed{m_{AB}=\frac{36}{y_2+y_1}}$$

(2.P) بحسب المعطيات $(x,7\frac{1}{2})$ هي منتصف القطعة AB

أي يتحقق

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad 7\frac{1}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 15=y_1+y_2$$

وبالتالي يتحقق :-

$$m_{AB}=\frac{36}{y_1+y_2}=\frac{36}{15}=2.4$$

1-700-70-66-22 I www.IQsmart.co.il

ب) 1. معادلة البرابولا هي $y^2=36x$ بما ان معادلة البرابولا هي

من الصورة $y^2=2px$ بحيث احداثيات البؤرة هي $(\frac{p}{2},0)$

ومعادلة الراشد (مستقيم) هي $x=-\frac{p}{2}$

اذاً يتحقق $2p=36 \leftarrow p=18 \leftarrow \frac{p}{2}=9$

اذاً النقطة $(9,0)$ هي البؤرة وبالتالي $x=a$

هو الراشد لان كل نقطة على البرابولا تحقق ان بعدها

عن نقطة ثابتة (البؤرة) مساوية لبعدها عن مستقيم (الراشد)

وبالتالي $x=-9=a$ هو الراشد (مستقيم)

ب.2 بحسب المعطيات بُعد النقطة A عن المستقيم $x=0.75a$ هو 7

اي ان بعد النقطة A عن المستقيم $x=0.75(-9) \Longleftarrow \boxed{x=-6.75}$

هو 7 وحدات.

بُعد A عن المستقيم $x=-6.75$ $= x_1-(-6.75)=7 \rightarrow \boxed{x_1=0.25}$

$\downarrow$

X الاحداثي لـ A

نجد الاحداثي y للنقطة A: $y_1^2=36x_1$

$y_1^2=36\cdot(0.25) \rightarrow y_1^2=9 \Rightarrow y_1=\pm 3$

ولكن بما ان النقطة A موجودة بالربع الاول حسب المعطيات

لذلك $y_1=3$ واحداثيات A هي $\boxed{A:(0.25,3)}$

عندما معادلة المستقيم AB تحقق : $y=mx+n$

$m=2.4$ ويمر $A(0.25,3)$

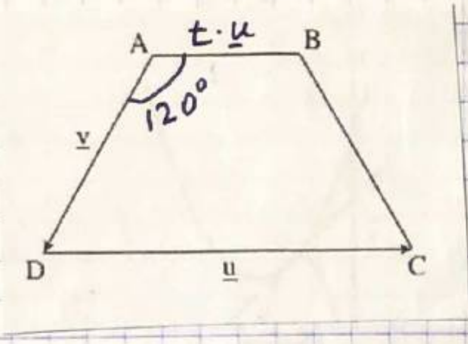
$y=mx+n \longrightarrow$

$3=2.4(0.25)+n \longrightarrow n=2.4$

$$\boxed{AB: y=2.4x+2.4}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 2



أ- بحسب المعطيات المشبه منحرف

متساوي الساقين أي $|\vec{AD}|=|\vec{BC}|$

وكذلك $\vec{AD}=\underline{v}$ اذاً $|\vec{AD}|=|\underline{v}|$

نعبر عن المتجه $\vec{BC}$ بدلالة $\underline{u}$ و $\underline{v}$

$$\vec{BC}=\vec{BA}+\vec{AD}+\vec{DC}=-t\underline{u}+\underline{v}+\underline{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{BC}=\underline{v}+(1-t)\cdot\underline{u}}$$

نعبر عن طول المتجه $\vec{BC}$: $|\vec{BC}|=\sqrt{(\vec{BC})(\vec{BC})}$

$$|\vec{BC}|=\sqrt{(\underline{v}+(1-t)\cdot\underline{u})^2}=\sqrt{|\underline{v}|^2+(1-t)\cdot 2\cdot\underline{u}\cdot\underline{v}+(1-t)^2|\underline{u}|^2}$$

$$|\vec{BC}|=\sqrt{|\underline{v}|^2+(1-t)^2\cdot|\underline{u}|^2+2(1-t)\cdot|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 120}$$

* الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{v}$ $(\measuredangle DAB=120^\circ)$ تحقق: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}||\underline{v}|\cdot\cos 120$

وبما أن $|\vec{AD}|=|\vec{BC}|=\underline{v}$ ، لذلك يتحقق:

$$|\underline{v}|=\sqrt{|\underline{v}|^2+(1-t)^2\cdot|\underline{u}|^2+\cancel{2}|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot(1-t)\cdot\underbrace{\cos 120}_{-\cancel{0.5}}}$$

$$|\underline{v}|=\sqrt{|\underline{v}|^2+(1-t)^2\cdot|\underline{u}|^2-|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot(1-t)}$$

نربع الطرفين نحصل على:

$$\cancel{|\underline{v}|^2}=\cancel{|\underline{v}|^2}+(1-t)^2\cdot|\underline{u}|^2-|\underline{u}||\underline{v}|(1-t)$$

نقسم طرفي المعادلة على $|\underline{u}|\cdot(1-t)$ $(t\neq 1)$

$$0=(1-t)\cdot|\underline{u}|-|\underline{v}| \Rightarrow 0=|\underline{u}|-t\cdot|\underline{u}|-|\underline{v}|=0$$

$$\Rightarrow t|\underline{u}|=|\underline{u}|-|\underline{v}| \Rightarrow t=\frac{|\underline{u}|-|\underline{v}|}{|\underline{u}|} \Rightarrow \boxed{t=1-\frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

(2.أ) من البند (أ) توصلنا إلى أن

$$\overrightarrow{BC} = \underline{v} + (1-t)\cdot \underline{u}$$

وبما انه من البند (أ) حصلنا على:

$$t = 1 - \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}$$

لذلك نعوض بدل t فنحصل على:

$$\overrightarrow{BC} = \underline{v} + \left(1 - \left(1 - \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\right)\cdot \underline{u}\right) = \underline{v} + \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\cdot \underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \underline{v} + \frac{|\underline{v}|}{|\underline{u}|}\cdot \underline{u}}$$

(ب.1) معطى أن $\underline{u} = (8,6,-10)$ و $\underline{v} = (-1,y,0)$

بما أنه يتحقق أن:

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 120$$

اذاً:

$$\Rightarrow (8,6,-10)\cdot(-1,y,0) = \sqrt{8^2+6^2+(-10)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+y^2}\cdot\underbrace{\cos 120}_{-0.5}$$

$$\Rightarrow -8+6y = \sqrt{64+36+100}\cdot\sqrt{1+y^2}\cdot(-0.5)$$

$$-8+6y = \sqrt{200}\cdot\sqrt{1+y^2}\,(-0.5) \Rightarrow -8+6y = 10\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+y^2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-8+6y = -5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+y^2} \xrightarrow{(\ )^2} 64-96y+36y^2 = 25\cdot 2\cdot(1+y^2)$$

نبسط ونحصل على

$$\Rightarrow 14y^2+96y-14=0 \longrightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{7}} \,//\, \boxed{y_2 = -7}$$

(ب.2) لكي تكون القاعدة DC قطر الدائرة الحاصرة لشبه المنحرف يجب ان ت الزاوية المحيطية المقابلة ل DC تساوي $90°$

اي يجب ان يتحقق $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = \underline{u}+\underline{v} = (7,6+y,-10)$. $\overrightarrow{AD} = \underline{v} = (-1,y,0)$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow (7,6+y,-10)\cdot(-1,y,0) = 0 \Rightarrow -7+6y+y^2 = 0$$

نحلها نحصل على $y=-7 // 1$ وبحسب نتائج البند (ب.1): $\boxed{y=-7}$ الملائم

1-700-70-66-22 www.iQsmart.co.il

حل سؤال 3

أ- $Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$\boxed{\cos(180+\alpha) = -\cos\alpha} \Rightarrow \cos(180+\theta) = -\cos\theta$

$\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha \Rightarrow \cos(180+\theta) = -\cos\theta$

لذلك

$r[\cos(180+\theta) + i\sin(180+\theta)] = r[-\cos\theta - i\sin\theta]$

$= r[-1(\cos\theta + i\sin\theta)] = -r[\cos\theta + i\sin\theta] = -Z$

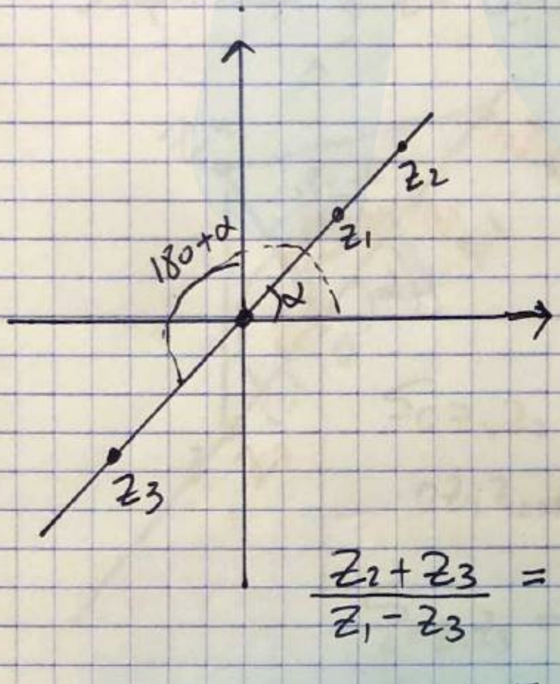
$\boxed{-Z = r[\cos(\theta+180) + i\sin(\theta+180)]}$

ب. بحسب المعطيات z_1, z_2, z_3 3 أعداد تقع على استقامة واحدة اي على مستقيم واحد في مستوى جاوس.

بحيث z_1 و z_2 و z_3 يقع في الربع الثالث

ومعطى أن: $Z_1 = r_1 \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$

نرسم الوضع الموصوف في السؤال



بما ان z_1 و z_2 يقعان بالربع الاول

لذلك لهم نفس ال arg اي نفس

الزاوية α وبالتالي $Z_2 = r_2 \cdot cis\alpha$

الزاوية الملائمة ل Z_3 هي $180+\alpha$

وبالتالي $Z_3 = r_3 \cdot cis(180+\alpha)$

من هنا يتحقق:

$$\frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 - Z_3} = \frac{r_2\, cis\alpha + r_3 \cdot cis(180+\alpha)}{r_1\, cis\alpha - r_3\, cis(180+\alpha)} = \frac{r_2\, cis\alpha - r_3\, cis\alpha}{r_1\, cis\alpha + r_3\, cis\alpha}$$

$$= \frac{\cancel{cis\alpha}(r_1 - r_3)}{\cancel{cis\alpha}(r_1 + r_3)} = \frac{r_1 - r_3}{r_1 + r_3} = \text{عدد حقيقي}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

(ج) بحسب المعطيات z_1 و z_3 تقعان على نقش دائرة الوحدة وبالتالي $r_1=r_3=1$ ويتحقق $\frac{z_2+z_3}{z_1+z_3}=\frac{5}{4}$

بحسب البند (ب) يتحقق:-

$$\frac{z_2+z_3}{z_1-z_3}=\frac{r_2-r_3}{r_1+r_3}=\frac{r_2-r_1}{r_1+r_1}=\frac{r_2-1}{1+1}=$$

إذاً يتحقق:- $\frac{r_2-1}{2}=\frac{5}{4}$

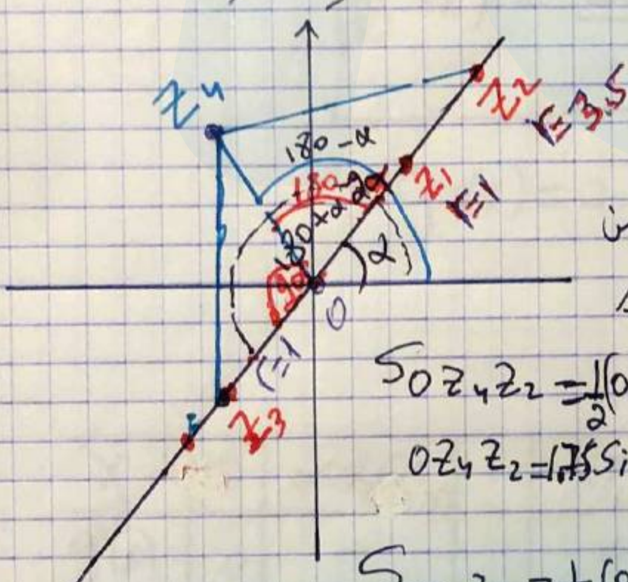
$$\Rightarrow r_2-1=\frac{\overset{10}{5\cdot 2}}{4} \longrightarrow r_2=2.5+1=3.5$$

$$\boxed{\text{إذاً:}\ |z_2|=3.5}$$

(د) z_4 هو العدد (المرافق) ل z_3 أي يتحقق $z_4=\overline{z_3}$

أي يتحقق $z_4=r_3\,cis-(180+\alpha)$ $(r_3=1)$

من هنا $z_4=1\,cis(-180-\alpha)$, نعيّن z_4 في هيئة المحاور



$$\Downarrow$$

$$z_4=1\,cis(180-\alpha)$$

$$(180-\alpha)=(-180-\alpha)\ *$$

مساحة المثلث $\Delta z_4z_3z_2$ تتألف من

مساحة مثلثي ΔOz_4z_2 , ΔOz_4z_3

$$S_{Oz_4z_2}=\frac{1}{2}(Oz_4)(Oz_2)\cdot\sin(\angle z_4Oz_2)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3.5\cdot\sin(180-2\alpha)$$

$$Oz_4z_2=1.75\sin 2\alpha \Rightarrow \boxed{S_{\Delta Oz_4z_2}=1.75\sin 2\alpha}$$

$$S_{\Delta Oz_4z_3}=\frac{1}{2}(Oz_4)(Oz_3)\cdot\sin(\angle z_4Oz_3)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\alpha$$

$$S_{\Delta Oz_4z_3}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$S_{Oz_2z_3z_4}=1.75\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\boxed{2.25\sin 2\alpha}$$

1-700-70-66-22 www.IQsmart.co.il

حل سؤال 4

$$\boxed{f(x)=4e^{\sqrt{x}}}$$

أ. الدالة $f(x)$ معرفة لكل $\underline{0<x}$

ب. $g(x)=2\cdot f'(x)$ $\quad h(x)=f(x^2)$ في المجال $x>0$

$$h(x)=f(x^2)=4e^{\sqrt{x^2}}=4e^{x} \Longrightarrow \boxed{h(x)=4e^{x}}$$

$$g(x)=2f'(x)=2\cdot4\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}$$

نجد النقاط القصوى للدالة g :-

$$g'(x)=4\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$g'(x)=\cancel{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{x}=\frac{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}}}$$

$$g'(x)=0 \underset{e^{\sqrt{x}}\neq0}{\Longrightarrow}(\sqrt{x}-1)=0 \Rightarrow \boxed{X=1}$$

نصنف النقطة :

X	0	$0<X<1$ $X=0.25$	1	$X>1$ $X=4$
$g'(x)$	//	$-$		$+$
$g(x)$	//	↘	min	↗

$$g'(\tfrac{1}{4})=\frac{2e^{\sqrt{0.25}}\cdot(\sqrt{0.25}-1)}{0.25\cdot\sqrt{0.25}}<0$$

$$g'(4)=\frac{2e^{\sqrt{4}}\cdot(\sqrt{4}-1)}{4\cdot\sqrt{4}}>0$$

$$g(1)=\frac{4e^{\sqrt{1}}}{\sqrt{1}}=4e$$

$$\boxed{(1,4e)\ \text{min}}$$

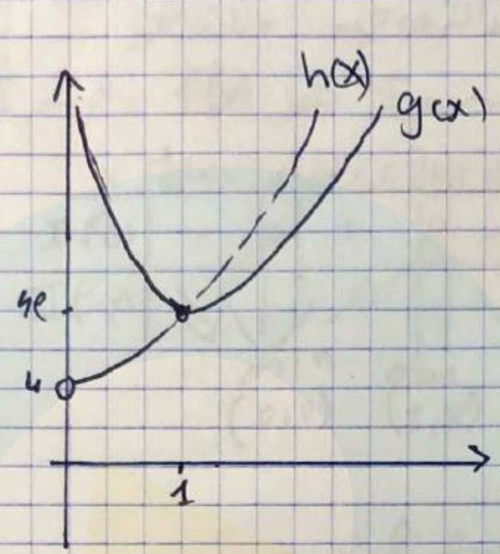
1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

نبيّن أنّ النقطة تقع على الدالة $h(x)$:

$$h(x)=4e^x \Rightarrow h(1)=4\cdot e^1=4e$$

اذاً النقطة $(1,4e)$ تقع على الدالة $h(x)$.

ج-



* نقطة تقاطع الدالة $g(x)$ و $h(x)$ هي: $(1,4e)$
* الدالة $h(x)=4e^x$ تصاعدية لكل x.
* مجال تعريف الدالتين $x>0$
* للدالة $g(x)$ يوجد نقطة صفر في $(1,4)$
* $(0,4)$ $(4\cdot e^0)$ هي نقطة للدالة $h(x)$ لأن الدالتين معرفات في $x>0$

د. بحسب المعطيات المساحة المطلوبة هي:

$$S=\int_1^a \Big(\underbrace{4e^x}_{h(x)}-\underbrace{\frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}_{g(x)}\Big)dx = e^4+4e-2f(a)=e^4+4e-2\cdot 4e^{\sqrt{a}}$$

$$=$$

$$S=\int_1^a 4e^x dx-\int_1^a \frac{4e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=$$

$$[4e^x]_1^a \qquad \int 8e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=[e^{f(x)}\cdot 8]_1^a=[8e^{f(x)}]_1^a$$

$$S=[4e^x]_1^a-[8e^{f(x)}]_1^a=[4e^x-8e^{\sqrt{x}}]_1^a=4e^a-8e^{\sqrt{a}}+4e$$

ويتحقق:

$$4e^a-\cancel{8e^{\sqrt{a}}}+\cancel{4e}=e^4+\cancel{4e}-\cancel{8e^{\sqrt{a}}}$$

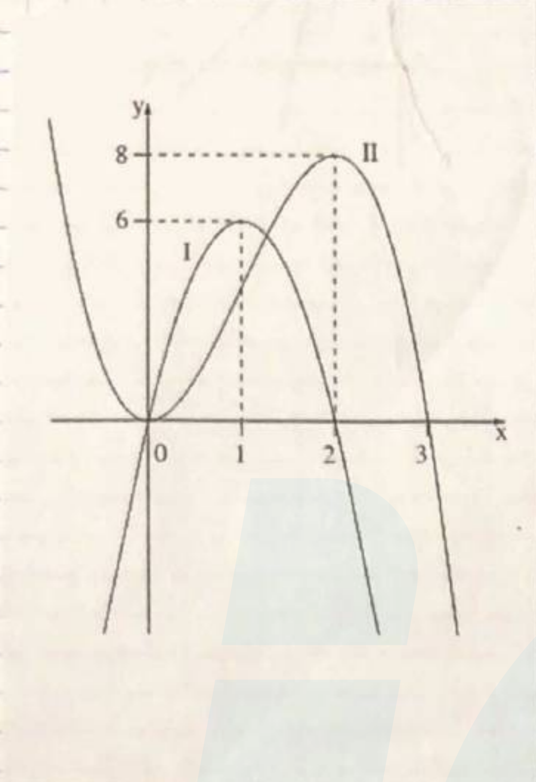
$$4e^a=e^4 \Rightarrow e^a=\frac{e^4}{4} \Rightarrow \ln e^a=\ln\frac{e^4}{4}$$

$$\rightarrow a\ln e=4\ln\frac{e}{4}=4\ln e\cdot 4^{-1}=4\cdot(\ln e-\ln 4) \Rightarrow \boxed{a=4(1-\ln 4)}$$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

حل سؤال 5:

أ) النقطة $x=0$ هي نقطة مينيمم للرسم II وفي $x<0$ بالرسم I تكون الدالة سالبة وفي $x>0$ تكون الدالة موجبة وبالتالي الرسم II هو $f(x)$ والرسم I هو $f'(x)$



x	$-1<x<0$	0	$0<x<2$	2	$2<x<4$	4
I $f'(x)$	−	0	+	0	−	
II $f(x)$	↘		↗		↘	

min $(0,0)$ max $(2,8)$

ب) $g(x)=\ln f(x)$

(1) مجال تعريف الدالة g هو كل x يحقق ان $f(x)>0$

اي المجال الموجب للدالة II: $-1\le x<0$ أو $0<x<3$

(2) خطوط تقارب عمودية $x=3$ أو $x=0$

خطوط تقارب أفقية لا يوجد

(3) $g'(x)=0$:

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=0 \rightarrow f'(x)=0$$

حسب الرسم: $x=2$ / $x=0$ ولكن $x=0$ ليست ضمن المجال.

ولذلك $x=2$ نقطة قصوى والاحداثي y لها هو $\ln(f(2))$

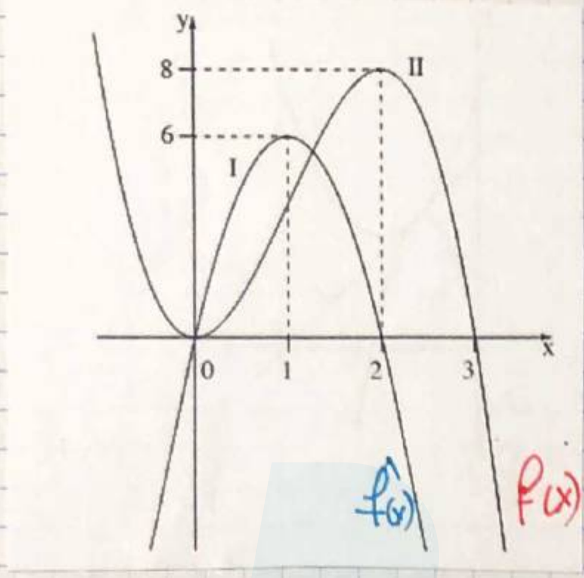
ويتحقق $\ln f(2)=\ln 8 \leftarrow (2,\ln 8)$

نوع النقطة: في $x=1$ $\left(g'=\frac{f'(1)}{f(x)}>0\right)$ وفي $x=2.5$ $\left(g'(2.5)=\frac{+}{-}\right)$

لذلك $\max(2,\ln 8)$

1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il

(4) الدالة $g(x)=\ln f(x)$



$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

الدالة $g(x)$ تصاعدية عندما يتحقق أن $g'(x)>0$

وبما أن $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

لذلك $g'(x)>0$ في حال كان:-

$g'(x)=\frac{+}{+}\left(\frac{f'}{f}\right)$ او $g'(x)=\frac{-}{-}\left(\frac{f'}{f}\right)$

بحسب الرسم f و f' موجبتين: أو بحسب الرسم f و f' سالبتين:-

$0<x<2$ او ϕ

$$\boxed{\text{اذاً المجال التصاعدي لـ } g \quad 0<x<2}$$

المجال التنازلي هو الذي يحقق $\frac{f'}{f}<0$ وبحسب الرسم يكون لـ f و f' اشارتين مختلفتين في المجال: $-1<x<0$

$$\boxed{\text{المجال التنازلي لـ } g \text{ هو } -1<x<0}$$

(5) توصيات:

* مجال تعريف الدالة g:

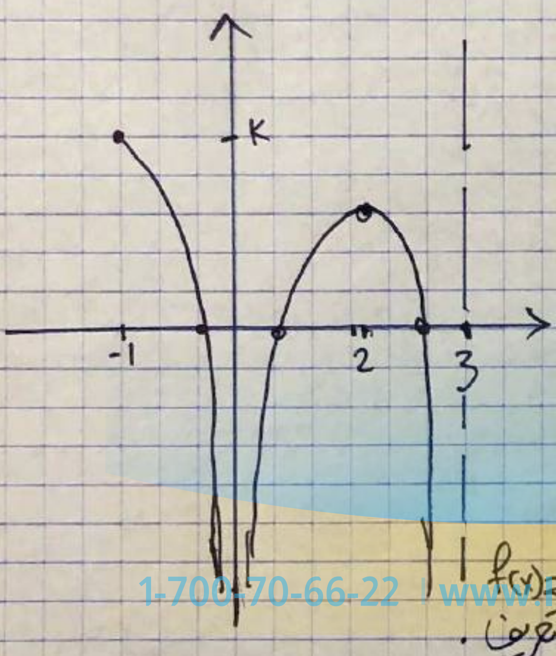
$-1\le x<0$ او $0<x<3$

* $g(-1)=\ln f(-1)=k$ نقطة

* $x=0$ او $x=3$ خطوط تقارب عمودية

* $\max(2,\ln(8))$

* النقاط الصفرية لـ g هي نقاط تحقق $f(x)=1$ ويوجد 3 نقاط كهذه ضمن مجال التعريف.



1-700-70-66-22 | www.IQsmart.co.il