حل نموذج بجروت

(806) 581

موعد صيف (أ)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

(٣) بحسب المعطيات نفهم النقاط التالية:

1. في المرحلة الاولى بدأ المصعدان الصعود بنفس الوقت
2. سرعة كل واحد من المصعدين ثابتة
3. المصعد (أ) وصل الى الطابق الذي ارتفاعه 33 متر بنفس الوقت الذي وصل المصعد (ب) للطابق الذي ارتفاعه 81 متر.
4. اثناء صعودهما توقف المصعد (أ) لمدة ١٤ ثانية والمصعد (ب) توقف لمدة 7 ثواني.

نعبّر عن الوضع الموصوف في المرحلة الاولى بواسطة جدول ونبني المعادلات الملائمة:

	سرعة	زمن	مسافة
مصعد (أ)	V_A	$\frac{33}{V_A}$	33
مرحلة التوقف	0	14	0

	سرعة	زمن	مسافة
مصعد (ب)	V_B	$\frac{81}{V_B}$	81
توقف	0	7	0

الزمن في المرحلتين متساوي للمصعدين أي يتحقق

$$\text{زمن مصعد (أ)} = 14 + \frac{33}{V_A} = 7 + \frac{81}{V_B} = \text{زمن مصعد (ب)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{81}{V_B} - \frac{33}{V_A} = 7} \quad \text{I}$$

بعد ذلك نزل المصعدان: المصعد (أ) نزل ١٥ متر و(ب) 63 متر
اثناء نزولهما توقف المصعد (أ) 9 ثوان أما (ب) لم يتوقف.
ووصل كل واحد من المصعدين الى النقطة التي توقف فيها بنفس المدة الزمنية، اي زمن تحركهما متساوي

نبني جدول يُعبر عن مرحلة النزول

	سرعة	زمن	مسافة			كمية	زمن	
مصعد (A)	V_A	$\frac{15}{V_A}$	15		مصعد (B)	V_B	$\frac{63}{V_B}$	63
توقف	0	9	0		توقف	(لم يتوقف)		

بما أن زمن النزول الكلي نفسه لذلك يتحقق:

$$\text{II} \quad \boxed{\frac{63}{V_B} = \frac{15}{V_A} + 9}$$

وبهذا حصلنا على معادلتين بمتغيرين:

$$\text{I} \quad \frac{81}{V_B} - \frac{33}{V_A} = 7 \xrightarrow[\text{نضرب}]{V_A \cdot V_B} \boxed{81V_A - 33V_B = 7V_A \cdot V_B}$$

$$\text{II} \quad \frac{63}{V_B} - \frac{15}{V_A} = 9$$

نأخذ المعادلة II ونعزل V_B (نضرب بـ $V_A \cdot V_B$)

$$63V_A - 15V_B = 9V_A \cdot V_B \Rightarrow 63V_A = 9V_A \cdot V_B + 15V_B$$

$$\Rightarrow \cancel{6}3V_A = \cancel{3}V_B \cdot (3V_A + 5) \Rightarrow \boxed{\frac{21V_A}{3V_A+5} = V_B}$$

نعوض في I:

$$81V_A - 33 \cdot \frac{21V_A}{3V_A+5} = \frac{7V_A \cdot 21V_A}{3V_A+5}$$

$$81V_A - \frac{693V_A}{3V_A+5} = \frac{147V_A^2}{3V_A+5} \xrightarrow[V_A \text{ على}]{\text{نقسم}} 81 - \frac{693}{3V_A+5} = \frac{147V_A}{3V_A+5}$$

$$\xrightarrow{*(3V_A+5)} 81(3V_A+5) - 693 = 147V_A \Rightarrow 243V_A + 405 - 693 = 147V_A$$

$$\Rightarrow 243V_A - 147V_A = 693 - 405 \Rightarrow 96V_A = 288 \Rightarrow \boxed{V_A = 3}$$

اذاً سرعة المصعد الاول $\boxed{V_A = 3 \text{ م/ث}}$

نجد سرعة المصعد الثاني:

$$V_B = \frac{21V_A}{3V_A+5} \Rightarrow V_B = \frac{21\cdot 3}{3\cdot 3+5} = \frac{63}{14} = 4.5$$

اذاً سرعة المصعد الثاني هي $\boxed{V_B = 4.5 \text{ م/ث}}$.

ب) بحسب المعطيات نفهم أنه في الوضع الاولى الموصوف بالبند (ب) فإن المصعد (أ) متواجد على الطابق الارضي
والمصعد (ب) موجود بطابق الذي ارتفاعه 42 متراً
المصعد (أ) صعد الى الطابق الذي ارتفاعه 42 متراً. بدون توقف
والمصعد (ب) نزل من الطابق الذي يتواجد فيه الى الطابق الذي ارتفاعه 42 متراً
المصعدان وصلا الى الطابق الذي ارتفاعه 42 متراً بنفس الوقت.
نبني جدولاً يعبر عن حركة المصعدين.

	سرعة	زمن	مسافة
مصعد (أ)	3	$\frac{42}{3}=14$	42
مصعد (ب)	4.5	8	$\underline{8\cdot 4.5}$ 36

← زمن تحرك مصعد (أ) هو 14 ثانية

بما ان المصعد (أ) و(ب) وصلا معاً والمصعد (ب) توقف 6 ثواني لذلك زمن تحركه هو $14-6=\underline{8}$

اذاً المسافة التي قطعها المصعد (ب) هي 36 متراً
لذلك قبل أن يصل إلى الطابق الذي ارتفاعه هو 42
فإنه كان على ارتفاع $36+42=78$ متراً

وواضح أنه لم يكن بالطابق العلوي لأن الطابق العلوي بالضرورة ارتفاعه 80 متراً على الاقل!!

حل سؤال 2:

بحسب المعطيات مجموع n الحدود الأولى من المتوالية a_n

هو $S_n=Kn^2-pn$ ، $p>0$ ، $K>0$ ، $n\geq 2$

1.أ

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$S_{n-1}=K(n-1)^2-p(n-1)$$

$$S_n=K\cdot n^2-pn$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=K\cdot n^2-p\cdot n-\left[K\cdot(n-1)^2-p(n-1)\right]$$

$$a_n=Kn^2-pn-K(n-1)^2+p(n-1)$$

$$a_n=K\left(n^2-(n-1)^2\right)-p\left(n-(n-1)\right)$$

$$a_n=K\cdot\left(n^2-(n^2-2n+1)\right)-p\cdot(1)$$

$$\boxed{a_n=K\cdot(2n-1)-p}$$

2.أ نعرض ان $a_1=S_1$ وعندها لكل n يتحقق أن قانون الحد العام الذي وجدناه صحيحًا لكل n طبيعي

$$a_1=K\cdot(2\cdot 1-1)-p=K-p$$

$$a_1=K-p$$

من المعطى:

$$S_1=K\cdot 1^2-p\cdot 1=K-p$$

اذاً

$$\boxed{S_1=K-p=a_1}$$

وبالتالي $a_n=K(2n-1)-p$ هو قانون الحد العام لكل $n\geq 2$ طبيعي.

3.أ. بحسب البند 1.أ: $a_n=K(2n-1)-p$

وبالتالي:

$$a_{n+1}=K(2(n+1)-1)-p$$

$$a_{n+1}=K\cdot(2n+2-1)-p=\boxed{K(2n+1)-p}$$

$$a_{n+1}-a_n=K(2n+1)-\cancel{p}-\left[K(2n-1)-\cancel{p}\right]$$

$$K(2n+1)-K(2n-1)=K\left[(\cancel{2n}+1)-(\cancel{2n}-1)\right]$$

$a_{n+1}-a_n=\boxed{2K}\Longrightarrow$ المتوالية حسابية

ب. بحسب المعطيات b_n و c_n متواليتان هندسيتان

أساس المتوالية b_n هو d أي $2k$

أساس المتوالية c_n هو $\frac{2}{d}$ أي $\frac{2}{2k}=\boxed{\frac{1}{k}}$

وكذلك بحسب المعطيات:

$k=1.5$ $\quad p=4.5$ و $\quad a_1=b_1=c_1$

بحسب البند (أ)

$a_1=S_1=k-p=1.5-4.5=-3$

إذاً: $\boxed{a_1=c_1=b_1=-3}$

و: $q_c=\frac{1}{k}=\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{q_c=\frac{2}{3}}$

وبالتالي المتوالية c_n هي متوالية هندسية متقاربة لأن:

$0<q_c=\frac{2}{3}<1$

وتحقق تعريف المتوالية الهندسية المتقاربة.

ج. بحسب المعطيات:

$$\frac{\text{مجموع أول } m \text{ حدود في } b_n}{\text{مجموع حدود المتوالية } c_n}=40\frac{1}{3}$$

بحسب البند السابق $q_c=\frac{2}{3}$. أساس المتوالية b_n هو $2k \Leftarrow 3$

إذاً $q_c=\frac{2}{3}$ و $q_b=3$. وكذلك $a_1=c_1=b_1=-3$

$$S_{c_n}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{-3}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-3}{\frac{1}{3}}=-9 \Rightarrow \boxed{S_{c_n}=-9}$$

$$S_{b_m}=b_1\cdot\frac{3^m-1}{3-1}=\frac{-3}{2}(3^m-1)$$

$$\frac{S_{b_m}}{S_{c_m}}=\frac{-\frac{3}{2}(3^m-1)}{-9}=40\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-\cancel{1.5}(3^m-1)}{-\cancel{9}\,6}=40\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3^m-1=242 \Rightarrow 3^m=242+1 \Rightarrow 3^m=243$$

$$\Rightarrow 3^m=3^5 \Rightarrow \boxed{m=5}$$

5) بما أن $c_1=-3$ و $q=\frac{2}{3}$ إذاً المتوالية c_n تصاعدية ($c_n > c_{n+1}$) لكل n

حل سؤال 3

بحسب معطيات السؤال نفهم أن:

1. المعلمون في المدرسة عددهم $\frac{1}{9}$ عدد طلاب المدرسة (الطلاب 9 اضعاف المعلمين)

$$q+9q=1 \Rightarrow 10q=1 \Rightarrow \boxed{q=\frac{1}{10}}$$

وهذا معناه ان احتمال اختيار بشكل عشوائي شخص الذي هو معلم بالمدرسة هو $\frac{1}{10}$ واحتمال اختيار طالب $\frac{9}{10}$

2. 80% من المعلمين فحصوا بفحص للكشف عن الكورونا أي أن

$$P\left(\text{شخص فحص بفحص الكورونا} \mid \text{اختيار معلم}\right) = 0.8$$

3. بحسب المعطى $\frac{13}{15}$ من الاشخاص من الذين اشتركوا بالفحص للكورونا هم طلاب أي يتحقق

$$P\left(\text{طالب} \mid \text{شخص اشترك بفحص كورونا}\right) = \frac{13}{15}$$

نعبر عن المعطيات بواسطة جدول ونستنتج نتائج:

	طالب	معلم	الاحتمال
اشترك بفحص كورونا	$\frac{13}{15}P$ = 0.52	0.08 *	$P=0.6$ **
لم يشترك بفحص كورونا	$0.4-0.02$ = 0.38	$0.1-0.08$ = 0.02	$1-P$ = 0.4
الاحتمال	0.9	0.1	1

من المعطى 2 نستنتج أن

$$* \; P\left(\text{فحص بالفحص} \mid \text{معلم}\right) = \frac{P\left(\text{معلم} \cap \text{فحص بالفحص}\right)}{P(\text{معلم})}$$

$$\Rightarrow 0.8 = \frac{P(\;\cap\;)}{0.1}$$

$$\Rightarrow \underset{0.08}{0.8\cdot 0.1} = P\left(\text{معلم} \cap \text{فحص بالفحص}\right)$$

$$** \Rightarrow p = 0.08 + \frac{13}{15}p \Rightarrow \frac{2}{15}p = 0.08 \Rightarrow p = 0.6$$

وعندها نستنتج كل القيم الناقصة بالجدول:

$$1-p = 1-0.6 = 0.4$$

$$\frac{13}{15}p = \frac{13}{15}\cdot 0.6 = 0.52$$

وعندها نحصل على الجدول الذي يعبر عن كل المعطيات :-

	طالب	معلم	
اشترك بالفحص	0.52	0.08	0.6
لم يشترك بالفحص	0.38	0.02	0.4
	0.9	0.1	1

وبحسب الجدول فالاحتمال بأنه من بين مجمل المشاركين في الاستطلاع يتم اختيار طالب لم يفحص بفحص الكشف عن الكورونا هو $\boxed{0.38}$ (بحسب الجدول)

ب) بحسب المعطيات اختاروا 5 أشخاص من بين الذين اشتركوا بالاستطلاع ونسأل عن الاحتمال بأن يكون 4 على الاقل اشتركوا في الفحص.

على الأقل 4: تعني أن 4 أو 5 أشخاص اشتركوا بالفحص

$$P\left(\begin{matrix}\text{على الاقل}\\4\end{matrix}\right) = P\left(\begin{matrix}\text{4 من 5}\\\text{اشتركوا}\end{matrix}\right) + P\left(\begin{matrix}\text{5 من 5}\\\text{اشتركوا}\end{matrix}\right)$$

$$\binom{5}{4}\cdot(0.6)^4\cdot(0.4)^1 + \binom{5}{5}(0.6)^5 = \overline{0.2592+0.07776}^{\,0.33696}$$

$$\boxed{P\left(\begin{matrix}\text{على الاقل 4}\\\text{اشتركوا}\end{matrix}\right) = 0.33696}$$

ج) بحسب المعطيات من بين الخمسة الذين اشتركوا بالاستطلاع هنالك واحد معلوم أنه اشترك بفحص كورونا ونسأل عن الاحتمال أن 4 على الأقل منهم قد فحصوا أي $P\left(\begin{matrix}\text{4 على الاقل}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{واحد}\\\text{فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right)$

$$P\left(\begin{matrix}\text{4 على الاقل}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{واحد}\\\text{فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{4 على}\\\text{الاقل}\end{matrix}\cap\begin{matrix}\text{واحد}\\\text{فحص}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{واحد}\\\text{فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right)}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{على الأقل}\\\text{واحد}\\\text{فحص}\end{matrix}\right) = 1 - P\left(\begin{matrix}\text{لا أحد من 5}\end{matrix}\right) = 1-(0.4)^5 = 0.98976$$

الاحتمال ان 4 على الاقل قد شُخصوا بالفحص تم حسابه بالبند (ج) وبالوضع المطلوب بالسؤال الاحتمال ان يكون قد تم فحص على الاقل 4 اذا علمنا ان 1 قد تم فحصه هو

$$P\left(\begin{matrix}\text{4 على الاقل}\\\text{فحصوا}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\text{واحد فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\text{4 على الاقل} \cap \begin{matrix}\text{واحد فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{واحد فحص}\\\text{على الاقل}\end{matrix}\right)} = \frac{\overset{\text{س (ج)}}{0.33696}}{0.98976}$$

$$\boxed{P\left(\begin{matrix}\text{4 على}\\\text{الاقل}\\\text{فحصوا}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\text{واحد}\\\text{على الاقل}\\\text{فحص}\end{matrix}\right) = 0.34044}$$

د) حسب المعطيات 2 من بين الخمسة قد فحصوا بفحص الكورونا ونسأل عن الاحتمال بأن يكون الأخير قد اشترك بفحص الكشف عن الكورونا

لكي نضمن ان الأخير قد فحص بفحص كورونا علينا ان نضمن أنه من بين ال 4 الاوائل فقط واحد فُحص, اذًا

$$P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\\\text{من بين 5}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix}\text{اثنين من}\\\text{5 فحصوا}\end{matrix}\right)}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{اثنين من}\\\text{5 فحصوا}\end{matrix}\right) = \binom{5}{2}\cdot(0.6)^2\cdot(0.4)^3 = 0.2304$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\\\text{من 5}\end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\right)}{P(\text{اثنين فحصوا})}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\right) = \underline{P\left(\begin{matrix}\text{1 من 4}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\right)} \cdot \underline{P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix}\right)}$$

$$= \binom{4}{1}\cdot(0.6)^1\cdot(0.4)^3 \cdot 0.6$$

$$= 0.1536 \cdot 0.6 = 0.09216$$

وعندها:

$$P\left(\begin{matrix}\text{الاخير}\\\text{فحص}\end{matrix} \cap \begin{matrix}\text{اثنين}\\\text{فحصوا}\end{matrix}\right) = \frac{0.09126}{0.2304} = \boxed{0.4}$$

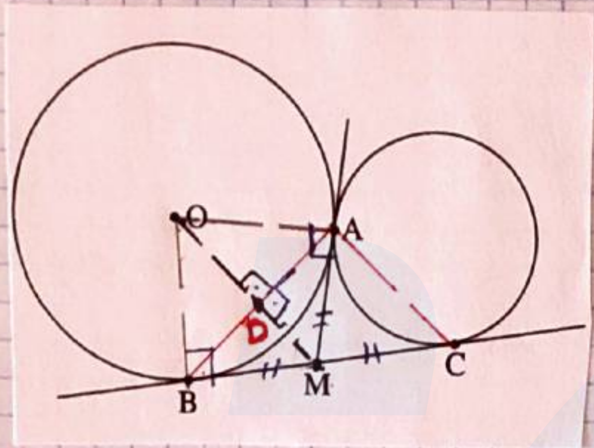
حل سؤال 4

أ. نرسم الوترين AB و AC

① $AM = BM$ طول المماس المرسوم من نقطة خارج دائرة حتى نقطتي التماس متساوي

② $AM = MC$

③ $AM = MC = BM$



وهذا معناه أن AM مستقيم متوسط للضلع BC في المثلث ABC

وحسب النظرية:

إذا كان في مثلث ما المستقيم المتوسط لضلع مساوٍ لنصف الضلع إذاً المثلث قائم الزاوية والزاوية المقابلة لذلك الضلع قائمة. نستنتج أن $\angle BAC = 90^\circ$

وهو المطلوب (أ).

ب) حسب فيثاغورس في المثلث القائم الزاوية ABC يتحقق

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (2AM)^2 = AB^2 + AC^2$

$\boxed{BC = 2AM \text{ حسب } (3)}$

$\Rightarrow \boxed{4AM^2 = AB^2 + BC^2}$

وهو المطلوب (ب)

ج) $AC = 6$ $AB = 8$ إذاً $BC = 10$ حسب فيثاغورس.

وبالتالي $AM = BM = BC = 5$

نرسم أنصاف الأقطار AO و BO

بما أن نصف القطر عمودياً على المماس في نقطة التماس اذاً:

$\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ$

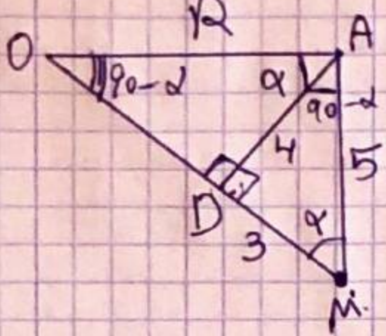
الشكل الرباعي AOBM هو دالتون $OB = OA$ // $AM = BM$

$OM \perp AB$ $AD = DB = \frac{1}{2}$ (D نقطة تقاطع اقطار الدالتون)

ينتج أن AD الارتفاع في مثلث متساوي الساقين وبالتالي ينصف زاوية الرأس. وكذلك يتحقق $AD^2 + MD^2 = AM^2 \Leftarrow$

$(4)^2 + MD^2 = 5^2 \rightarrow 16 + MD^2 = 25 \rightarrow MD^2 = \overbrace{25-16}^{9} = 9$

$$\boxed{MD = 3}$$



نفرض $\measuredangle M = \alpha$ اذاً $\measuredangle O = 90-\alpha$

وبالتالي في المثلث $\triangle ADO$, $\measuredangle DAO = \alpha$

وفي المثلث ADM, $\measuredangle AOD = 90-\alpha$

اذاً $\triangle ADO \sim \triangle AMD$ حسب (ز، ز)

$\measuredangle ADM = \measuredangle ADO = 90^\circ$

$\measuredangle DAO = \measuredangle AMD = \alpha$

من التشابه ينتج أن :-

$$\frac{\overbrace{AO}^{R}}{AD} = \frac{AM}{DM}$$

$$\frac{R}{4} = \frac{5}{3} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{20}{3}}$$

د

$$S_{\triangle OBM} = \frac{OB \cdot BM}{2} = \frac{\frac{20}{3} \cdot 5}{2} = \frac{50}{3}$$

المستقيم المتوسط في المثلث يقسم المثلث الى مثلثين لهم نفس المساحة وبالتالي في المثلث ABC, AM هو متوسط

اذاً $S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

$$\underset{\text{القائم}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

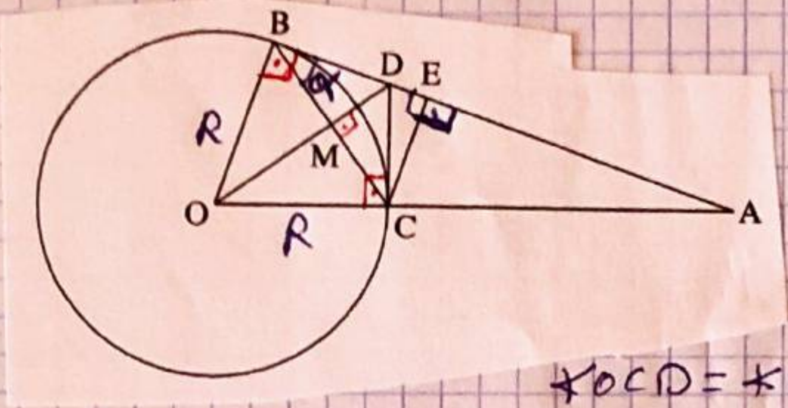
اذاً :

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

وبالتالي :

$$\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{\frac{50}{3}}{12} = \boxed{\frac{50}{36} = \frac{25}{18}}$$

حل سؤال 5



1.أ بما ان المماس عمودي على نصف القطر لذلك

$OC \perp DC$ و $OB \perp DE$

وهما زاويتان متقابلتان

في شكل رباعي $\angle OCD = \angle OBD = 90$

وبالتالي مجموع الزاويتين الأخرتين في الشكل الرباعي $OBDC$

هو 180° اي $\angle BOC + \angle BDC = 180$ (مجموع زوايا شكل رباعي 360°)

من هنا في الشكل الرباعي $OBDC$ كل زاويتين متقابلتين

مجموعهم 180° ويمكن حصره داخل دائرة.

2.أ الشكل الرباعي $OBDC$ هو دالتون

$OB = OC = R$

$BD = DC$ طول المماسين المرسومين من نقطة خارج دائرة

حتى نقطة التماس متساوي.

الاقطار في الدالتون متعامدة أي $\angle M = 90^\circ$

وحسب المعطى $\angle E = 90^\circ$.

من هنا في الشكل الرباعي $MDEC$

$\angle DMC + \angle CED = 90^\circ + 90^\circ = 180$

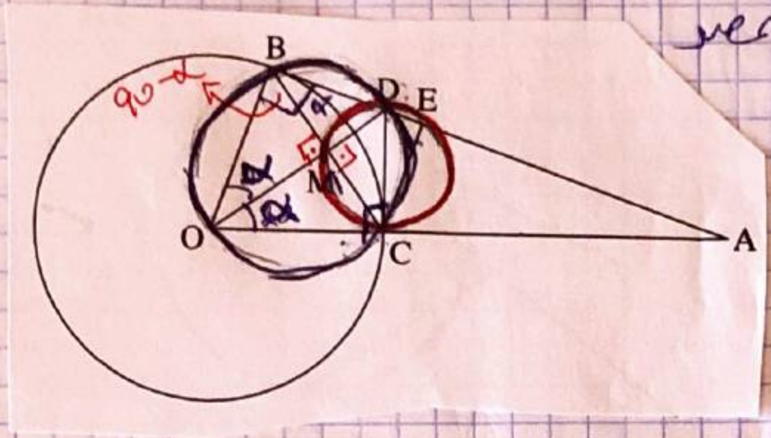
وبما أن مجموع زوايا ا الشكل الرباعي 180° اذاً

$\angle MDE + \angle MCE = 360 - 180 = 180^\circ$

وبالتالي في الشكل الرباعي $MDEC$ حاصل جمع كل

زاويتين متقابلتين هو 180° ويمكن حصره داخل دائرة

نرسم الدائرة التي تحصر الشكل الرباعي OBDC والتي d_1 هو قطرها
ونرسم الدائرة التي تحصر MDEC والتي قطرها d_2.



d_3 هو قطر الدائرة التي تحصر المثلث ODA .

$OD = d_1$ هو قطر في الدائرة التي تحصر OBDC لأن $\angle OBD = 90^\circ$ وهي محيطية مقابلة للقطر

$\angle M = 90$, $\angle OBM = 90-\alpha$ ولان مجموع زوايا المثلث 180° إذاً $\angle MOB = \alpha$ وينتج أن $\angle MOC = \alpha$ أيضاً.

في $\triangle OCD$ $\angle OCD = 90^\circ$ وبالتالي يتحقق ($OC = R$)

$$tg\alpha = \frac{DC}{OC} \Rightarrow tg\alpha = \frac{DC}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{DC = R \cdot tg\alpha}$$

وكذلك يتحقق أن:

$$OD^2 = DC^2 + OC^2$$

$$OD^2 = (R \cdot tg\alpha)^2 + R^2 = R^2\left(tg^2\alpha + 1\right)$$

$$OD^2 = R^2\left(tg^2\alpha + 1\right) \rightarrow OD = \sqrt{R^2\left(tg^2\alpha + 1\right)}$$

$$\boxed{OD = R\sqrt{tg^2\alpha + 1} = d_1}$$

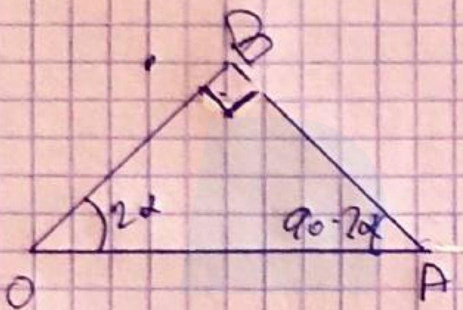
ويمكن كتابتها بصورة أخرى:
$$tg^2\alpha + 1 = \frac{\overbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}^{1}}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow OD = R \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = R\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{d_1 = R \cdot \sqrt{tg^2\alpha + 1} = \frac{R}{\cos\alpha}}$$

d_2 هو قطر الدائرة التي تحصر الشكل الرباعي MDEC
وبما أن $\angle DMC$ قائمة لذلك قطر الدائرة التي تحصر الشكل الرباعي هو DC لأنه يقابل زاوية محيطية قائمة
وحسب ما وجدنا سابقًا

$$d_2 = DC = R \cdot tg\alpha$$

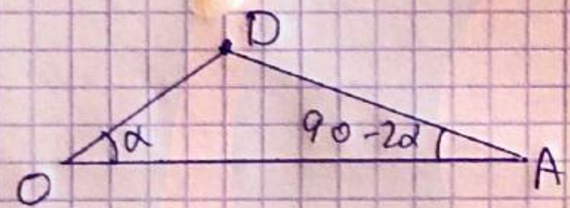


في المثلث AOB

$\angle OBA = 90^\circ$; $\angle BOA = 2\alpha$

وبالتالي: $\angle BAO = 90 - 2\alpha$

وبالتالي يتحقق في المثلث AOD



$$\frac{OD}{\sin(90-2\alpha)} = d_3$$

d_3 - قطر الدائرة المحيطة بالشكل الرباعي ODEC.

$$\Rightarrow d_3 = \frac{OD}{\cos 2\alpha} \qquad \left[OD = \frac{R}{\cos\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow d_3 = \frac{\frac{R}{\cos\alpha}}{\cos 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\boxed{d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}}$$

ب.

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3} \Longrightarrow d_1^2 = d_2 \cdot d_3$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2 = R\, tg\alpha \cdot \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\frac{R^2}{\cos^2\alpha} = R^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\frac{1}{\cancel{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha} \cdot \cos 2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \sin\alpha$$

$$\sin(90-2\alpha) = \sin\alpha$$

$90-2\alpha+360k = \alpha$ أو $180-(90-2\alpha)+360k = \alpha$

$90+360k = 3\alpha$ أو $90+2\alpha+360k = \alpha$

$30+360k = \alpha$ أو $\alpha = -90$ ✗ غير ملائم

$\boxed{\text{حل} \quad 30 = \alpha}$

حل سؤال 6

$$f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2} \qquad g(x)=\frac{x}{(x^3-2)^3}$$

1.أ مجال تعريف كل من f و g هو $x^2-2\neq 0$

$\rightarrow x^2\neq 2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

اذاً مجال تعريف الدالة f و g هو:

$$\boxed{x\neq\sqrt{2} \text{ أو } x\neq-\sqrt{2}}$$

2.أ خطوط التقارب

المعامدة لـ x بما ان البسط لا يساوي صفر

في النقاط التي فيها الدالتين غير معرفات

لذلك خطوط التقارب المعامدة لـ x هي

$\boxed{x=-\sqrt{2}}$ $\boxed{x=+\sqrt{2}}$

المعامدة لـ y (موازية لـ x)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(x^2-2)^2}\longrightarrow\frac{x}{(x^2)^2}\Rightarrow\frac{x}{x^4}=\frac{1}{x^3}\longrightarrow 0$$

اذاً $\boxed{y=0}$ خط تقارب افقي للدالة f عندما $x\to\pm\infty$

بنفس الاسلوب بالنسبة للدالة g(x)

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\frac{x}{(x^2-2)^3}\longrightarrow\frac{x}{(x^2)^3}\longrightarrow\frac{x}{x^6}\longrightarrow\frac{1}{x^5}\longrightarrow 0$$

اذاً y=0 خط تقارب افقي للدالة g(x) عندما

يقترب $x\to\pm\infty$

د.2) نجد مشتقات الدالتين

$$f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-2)^2-x\cdot 2x\cdot 2(x^2-2)^1}{(x^2-2)^4}=\frac{(x^2-2)^2-4x^2(x^2-2)}{(x^2-2)^4}$$

$$=\frac{(x^2-2)\left[(x^2-2)-4x^2\right]}{(x^2-2)^4}=\frac{(x^2-2)\left[-3x^2-2\right]}{(x^2-2)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2)\left[-3x^2-2\right]}{(x^2-2)^4}$$

$$f'(x)=0 \implies (x^2-2)(-3x^2-2)=0$$

$x^2-2=0$ او $-3x^2-2=0$

$x=\pm\sqrt{2}$ تعبير سالب لكل x لن يساوي صفر

لا الدالة غير معرفة بهذه النقاط.

ولذلك لا يوجد نقاط قصوى للدالة $f(x)$. اي ان

ان الدالة اما تصاعديه او تنازلية في كل جزء من مجال تعريفها

نبرهن أنه لا يوجد نقاط قصوى للدالة $g(x)$:

$$g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3} \implies g'(x)=\frac{1\cdot(x^2-2)^3-x\cdot 2x\cdot 3(x^2-2)^2}{((x^2-2)^3)^2}$$

$$g'(x)=\frac{(x^2-2)^3-6x^2(x^2-2)^2}{(x^2-2)^6}=\frac{(x^2-2)^2\left[(x^2-2)-6x^2\right]}{(x^2-2)^6}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{(x^2-2)^2\cdot\left[-5x^2-2\right]}{(x^2-2)^6}} \implies g'(x)=0 \implies (x^2-2)^2\cdot(-5x^2-2)=0$$

$(x^2-2)^2=0$ سالب دائما

$x^2-2=0 \implies \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$ غير معرفة الدالة

وبالتالي لا يوجد نقاط صفرية للمشتقة أي لا يوجد نقاط قصوى

أ. (4) نبرهن أن الدالة $f(x)$ فردية

$$f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{((-x)^2-2)^2}=\frac{-x}{(x^2-2)^2}=-\cdot\frac{x}{(x^2-2)^2}=-f(x)$$

اذاً $f(-x)=-f(x)$ والدالة $f(x)$ فردية

$$g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$$

$$g(-x)=\frac{-x}{((-x)^2-2)^3}=-\cdot\frac{x}{(x^2-2)^3}=-g(x)$$

اذاً $g(-x)=-g(x)$ والدالة $g(x)$ فردية.

ب. نفحص اشارة المشتقة في المجال $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ ونحدد أي رسم الدالة يلائم.

$$f'(x)=\frac{(x^2-2)\left[-3x^2-2\right]}{(x^2-2)^4}$$

نختار $x=0 \leftarrow$

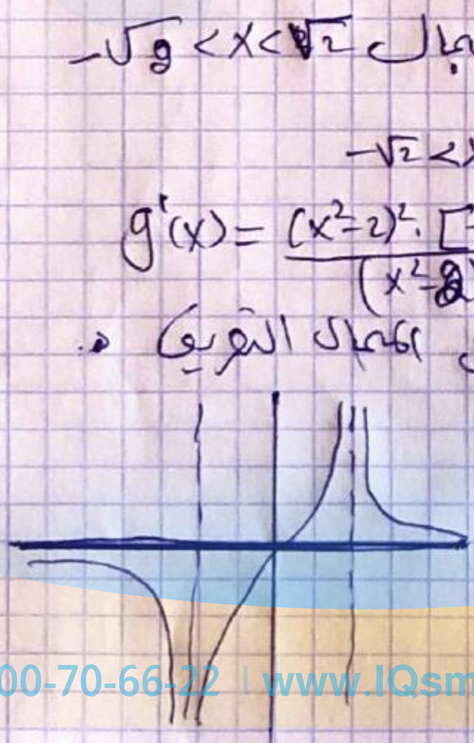
$$f'(0)=\frac{(0^2-2)\cdot\left[\overset{-2}{\text{سالب}}\right]}{\underset{(-2)^4}{\text{موجب}}}=\frac{-2\cdot(-2)}{16}=\frac{4}{16}>0$$

اذاً الدالة $f(x)$ تصاعدية في المجال $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ وكل

نفحص اشارة $g'(x)$ في المجال $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

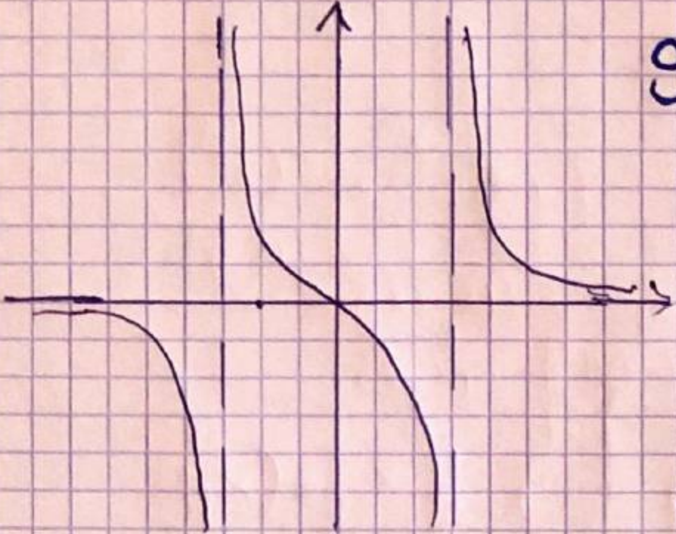
$$g'(x)=\frac{(x^2-2)^2\cdot\left[-5x^2-2\right]}{(x^2-2)^6}=\frac{+\cdot-}{+}=-$$

اي ان الدالة $g(x)$ تنازلية في كل مجال التعريف.

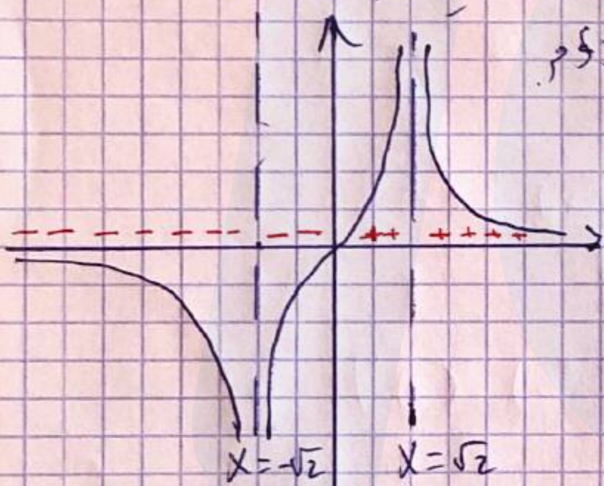


من هنا الرسم المرفق ملائم للدالة $f(x)$.

ب. 2. الرسم البياني للدالة g(x)



ج. بحسب المعطيات $h'(x)=f(x)$ اي أن الرسم البياني للدالة f(x)
هو رسم المشتقة للدالة h(x).
ونلاحظ ايضاً أنه للدالة f(x) و h(x) نفس مجال التعريف.
وبالتالي مجالات تصاعد وتنازل الدالة h(x) هي المجالات
الموجبة والسالبة للدالة f(x) على التوالي
بحسب الرسم $f=h'$:



المجالات التصاعدية لـ h(x)

$x>\sqrt{2}$ أو $0<x<\sqrt{2}$

المجالات التنازلية لـ h(x)

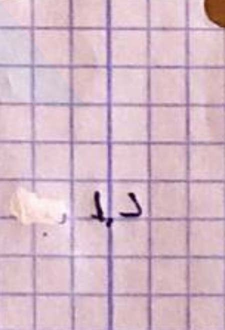
$x<-\sqrt{2}$ أو $-\sqrt{2}<x<0$

د. 1.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

وبما أن الدالة f(x) فردية لذلك بحسب صفة التماثل
للدالة الفردية بالنسبة لمستقيم $x=0$ (المحور y)
فإن: $\int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(x)dx$

وبالتالي مجموع التكاملين هو 0 أي $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$



المساحتين متساويتين ولكن التكاملين متضادين

المساحة المطلوبة هي المساحة المخططة وبحسب البند د 1 فإن هذه المساحة تساوي بحسب اعتبارات التماثل للدالة الفردية مرتين المساحة من $X=0$ حتى $X=1$:

$$S=2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$S=2\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^2}\,dx=\int_0^1 \frac{2x}{(x^2-2)^2}\,dx=\int_0^1 \frac{m'(x)}{m^2(x)}\,dx$$

$$=\left[\frac{-1}{m(x)}\right]_0^1=\frac{-1}{(x^2-2)}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{-1}{1^2-2}-\frac{-1}{0^2-2}=\underbrace{\frac{-1}{-1}}_{1}-\underbrace{\frac{-1}{-2}}_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

إذاً المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x=-1$ و $x=1$ هي $\frac{1}{2}$ وحدة مساحة.

هـ. $K(x)=f(x)+b \quad b\neq 0$

الدالة $K(x)$ عبارة عن ازاحة عمودية (على المحور y) للدالة الفردية $f(x)$. وبالتالي $K(x)$ ليست دالة فردية لأن ازاحة لدالة فردية تعطينا دالة ليست فردية. وليست زوجية ايضاً. اذاً الدالة $K(x)$ ليست فردية وليست زوجية.

حل سؤال 7

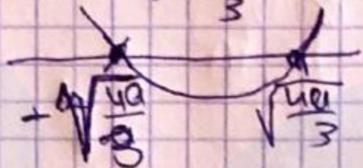
$a>0 \qquad f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$

أ- مجال تعريف الدالة:

$x \neq 0$ وأيضًا $3x^2-4a \geq$ صفر

$3x^2 \geq 4a$

$x^2 \geq \frac{4a}{3}$ $\Longrightarrow$ مجال التعريف



$\boxed{x \leq -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ او $x \geq \sqrt{\frac{4a}{3}}}$

ب- $f(-x)=\frac{\sqrt{3(-x)^2-4a}}{(-x)^3}=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{-x^3}=-f(x)$

إذن $f(-x)=-f(x)$ ← الدالة $f(x)$ فردية.

ج- مع المحور x $\quad f(x)=0$

$0=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3} \Rightarrow 3x^2-4a=0$

$\Rightarrow 3x^2=4a \Rightarrow x^2=\frac{4a}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4a}{3}}$

إذًا التقاطع مع x: $\left(\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$ ، $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0\right)$

مع المحور y لا يوجد التقاطع لأن الدالة غير معرفة في $x=0$

النقاط المشبوهة

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3x^2-4a}}\cdot \overset{3}{\cancel{6}}x\,(x^3)-\sqrt{3x^2-4a}\cdot 3x^2}{(x^3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3x^4-\sqrt{3x^2-4a}\cdot\sqrt{3x^2-4a}\cdot 3x^2}{\sqrt{3x^2-4a}}}{x^6}$$

$$f'(x)=\frac{3x^4-(3x^2-4a)\cdot 3x^2}{x^6\sqrt{3x^2-4a}}=\frac{3\cancel{x^2}\left[x^2-3x^2+4a\right]}{x^{\cancel{6}}\sqrt{3x^2-4a}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3\left[-2x^2+4a\right]}{\sqrt{3x^2-4a}\,x^4}}$$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow -3\left[-2x^2+4a\right]=0$$

$$3\neq 0 \qquad -2x^2+4a=0 \Longrightarrow x^2=2a \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2a}}$$

اذاً نقاط الشك هي (أي נק' חשודות): $x=\sqrt{2a}$ $x=-\sqrt{2a}$

نحدد نوع النقطة

بما ان المقام في المشتقة موجب لذلك اشارة المشتقة الثانية في نقطة الشك تحدد حسب اشارة مشتقة البسط في النقطة المشبوهة

$$f'_{\text{البسط}}=3\left[-2x^2+4a\right]=-6x^2+12a$$

$$f''_{\text{البسط}}=-12x \qquad f''(\sqrt{2a})=-12\cdot\sqrt{2a}<0 \Rightarrow x=\sqrt{2a}\ \max$$

$$f''(-\sqrt{2a})=-12\cdot(-\sqrt{2a})=12\cdot\sqrt{2a}>0$$

$$(\min)\quad x=-\sqrt{2a}$$

$$f(\sqrt{2a})=\frac{\sqrt{3(\sqrt{2a})^2-4a}}{(\sqrt{2a})^3}=\frac{\sqrt{6a-4a}}{2a\cdot\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{2a}}{2a\cdot\sqrt{2a}}=\frac{1}{2a}$$

$$f(-\sqrt{2a})=-f(\sqrt{2a})=\frac{-1}{2a}$$

ز 3 :

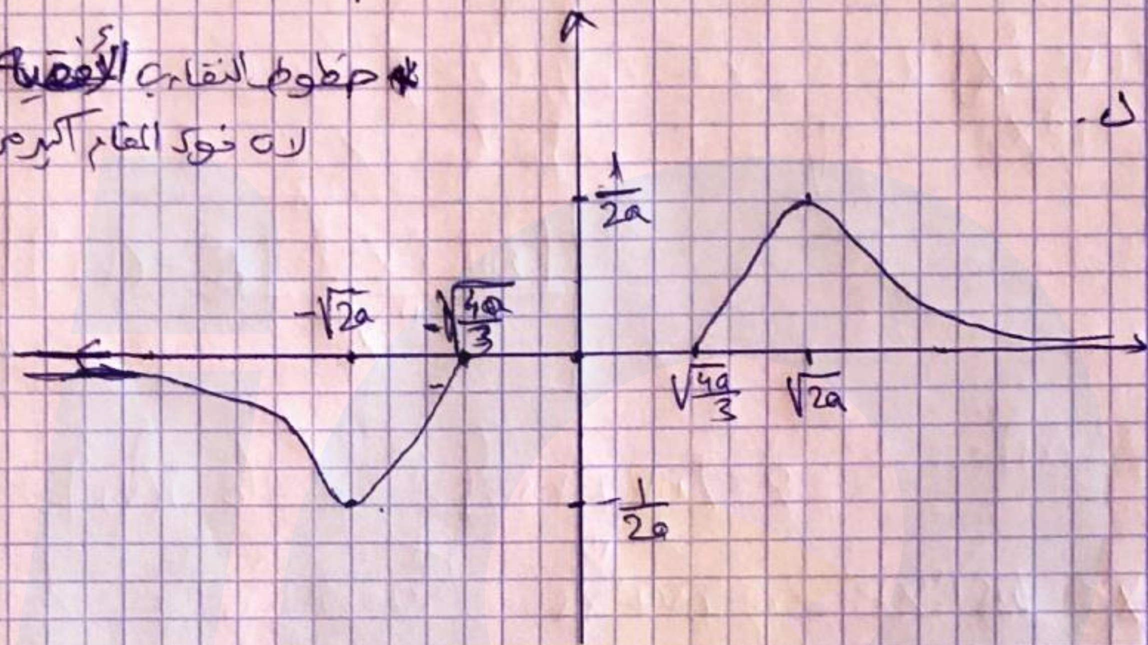
מקסימום $\left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a}\right)$ מינימום $\left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$

د في أطراف مجال التعريف - (النقاط مع x)

$\left(\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$ מינימום $\left(-\sqrt{\frac{4a}{3}}, 0\right)$ מקסימום

* خطوط التقارب الأفقية $\boxed{y=0}$
لان فوق المقام أكبر من فوق البسط

ل.



هـ.1 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

الدالة $g(x)$ معرفة لكل x تكون فيه $f(x)$ معرفة
بشرط ان لا يتحقق ان $f(x)=0$ اي ان $g(x)$ معرف
لكل x فيه $f(x)$ معرف ما عدا في النقاط الصفرية لـ $f(x)$
ولذلك مجال تعريف الدالة g هو $x>\sqrt{\frac{4a}{3}}$ أو $x<-\sqrt{\frac{4a}{3}}$

هـ.2 خطوط التقارب العمودية لـ $g(x)$ هي $x=\sqrt{\frac{4a}{3}}$ $x=-\sqrt{\frac{4a}{3}}$

خطوط التقارب الافقية

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0} \to \infty$$

اي لا يوجد خطوط تقارب أفقية

و) بحسب المعطيات للدالة $g(x)$ و $f(x)$ يوجد نقاط مشترك للدالتين في النقاط القصوى.

النقاط القصوى لـ $g(x)$

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$$

أي النقاط القصوى لـ $g(x)$ هي نفسها لـ $f(x)$ (الإحداثي x نفسه)

ولكن بما أن السالب $-f(x)$ في مشتقة g، لذلك النقاط القصوى ستتغير من min إلى max وبالعكس.

وكذلك بما أنه المماس مشترك في هذه النقاط لذلك يتحقق أن $f(x)=g(x)$ في هذه النقاط

أي $f(x)=\frac{1}{f(x)} \Leftarrow f^2(x)=1 \Leftarrow f(x)=\pm 1$

في النقاط القصوى.

وبما أن النقاط القصوى الداخلية لـ $f(x)$ هي:-

$$\left(\sqrt{2a}, \frac{1}{2a}\right) \Rightarrow \frac{1}{2a}=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

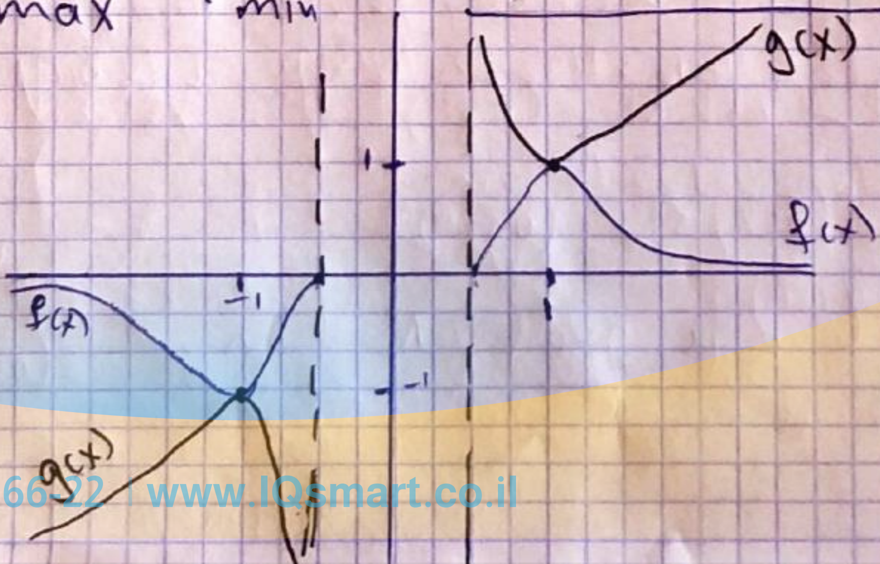
$$\left(-\sqrt{2a}, -\frac{1}{2a}\right)$$

وعندها النقاط القصوى لـ f:

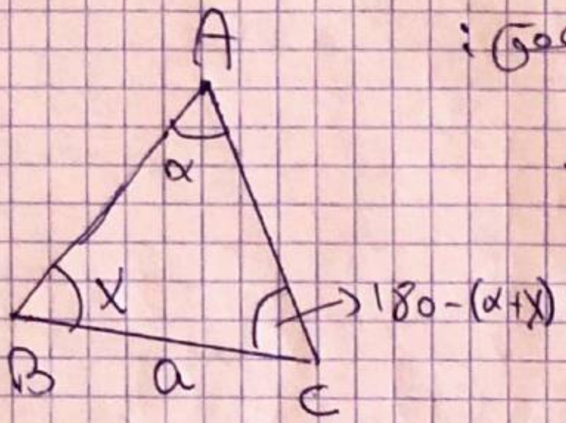
$(1,1)$ max $(-1,-1)$ min

والنقاط القصوى لـ $g(x)$:

$(1,1)$ min $(-1,-1)$ max



حل سؤال 8



أ- بحسب قانون ال sin يتحقق:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin x}=\frac{AB}{\sin(180-(\alpha+x))}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{AC=\frac{a\cdot\sin x}{\sin\alpha}}$$

$$AB=\frac{a\cdot\sin(180-(\alpha+x))}{\sin\alpha}$$

$$\boxed{AB=\frac{a\cdot\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}}$$

محيط ABC $=AB+AC+BC=\frac{a\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha}+\frac{a\sin x}{\sin\alpha}+a$

$$\boxed{\text{محيط } ABC=\frac{a[\sin x+\sin(\alpha+x)]}{\sin\alpha}+a}$$

ب- نعرف دالة المحيط: $f(x)=\frac{a[\sin x+\sin(\alpha+x)]}{\sin\alpha}+a$

أعداد نشتق الدالة على اعتبار أن a و α و $\sin\alpha$ (بارامترات) ثابته وبالتالي مشتقها هي 0.

$$f'(x)=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot[\cos x+\cos(x+\alpha)]+0$$

$$f'(x)=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot[\cos x+\cos(x+\alpha)] \quad , \quad f'(x)=0\Rightarrow \cos x+\cos(x+\alpha)=0$$

$$\Rightarrow \cos(x+\alpha)=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

وبما أن $0<\alpha<\pi$ و ... α ...

يجب ان يتحقق: $0<\alpha, x<\pi$

$$x+\alpha=\pi-x+2\pi k$$

I $\quad 2x=\pi-\alpha+2\pi k$

$$x=\frac{\pi-\alpha}{2}+\pi k \qquad (k=0) \text{ اذا}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi-\alpha}{2}}$$

او

II $\quad x+\alpha=-(\pi-x)+2\pi k$

$$\cancel{x}+\alpha=-\pi+\cancel{x}+2\pi k \rightarrow \alpha=-\pi \quad \text{غير مرتبط بـ } x$$

اذا: $\boxed{x=\frac{\pi-\alpha}{2}}$

نفحص ان $x=\frac{\pi-\alpha}{2}$ هي מקסימום.

$$f'(x)=\frac{a}{\sin\alpha}\left[\cos x+\cos(x+\alpha)\right]$$

$$f''(x)=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\left[-\sin x-\sin(x+\alpha)\right]$$

هذا التعبير موجب دائماً $\quad 0<\alpha<\pi \quad a>0$

$$f''\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}+\alpha\right)$$

$$=\underbrace{-\left[\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi+\alpha}{2}\right)\right]}_{(-)\cdot(\text{موجب } 0<\alpha<\pi)} \quad \underbrace{\frac{a}{\sin\alpha}}_{(+)}$$

اذا إشارة $f''\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)<0$ وبالتالي النقطة מקסימום

ب- بما ان أحد زوايا المثلث هي α والزاوية التي تعطينا מקסימום محيط هي $\frac{\pi-\alpha}{2}$ اذا الزاوية المتبقية هي $\frac{\pi-\alpha}{2}$ والمثلث متساوي الساقين