حل نموذج بجروت

482 (805)

موعد صيف (أ)

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الأول:

معطى أن المتوالية حسابية والحدود هي حدود متتالية أي:

نفرض أن:

$$a_n = 5t+6$$

$$a_{n+1} = 2t+t^2$$

$$a_{n+2} = 4t+t^2$$

(م) بما أن المتوالية حسابية اذاً الفرق بين كل حدين متتاليين هو d:

نجد t:

$$a_{n+2}-a_{n+1} = a_{n+1}-a_n$$

$$4t+t^2-(2t+t^2) = 2t+t^2-(5t+6)$$

$$4t+\cancel{t^2}-2t-\cancel{t^2} = 2t+t^2-5t-6$$

$$2t = t^2-3t-6$$

$$0 = t^2-5t-6$$

$$(t-6)(t+1)=0$$

$$\boxed{t=6} \qquad \boxed{t=-1}$$

امكانية I:

$t=-1$:

$$a_n = 5(-1)+6 = \boxed{1}$$

$$a_{n+1} = 2(-1)+(-1)^2 = \boxed{-1}$$

$$a_{n+2} = 4(-1)+(-1)^2 = \boxed{-3}$$

فرق المتوالية $d_1 = a_{n+1}-a_n = -1-1 = \boxed{-2}$

امكانية II:

$t=6$:

$$a_n = 5(6)+6 = \boxed{36}$$

$$a_{n+1} = 2(6)+6^2 = \boxed{48}$$

$$a_{n+2} = 4(6)+6^2 = \boxed{60}$$

فرق المتوالية $d_2 = a_{n+1}-a_n = 48-36 = \boxed{12}$

اذاً بامكانية I

$\boxed{d=-2}$; $\boxed{1,-1,-3}$

امكانية II

$\boxed{d=12}$; $\boxed{36,48,60}$

ب) بما ان المتوالية تنازلية اذاً t الذي يحقق هذا هو $\underline{t=-1}$.

وجدنا ان $a_n=+1$ بالنسبة لـ $t=-1$. و $d=-2$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$: \underline{a_1=189 \ , \ a_n=1 \ , \ d=-2}$$

$$1 = 189 - 2(n-1)$$

$$-188 = -2n+2$$

$$\cancel{:2} \ -190 = -2n$$

$$\boxed{n=95}$$

اذاً اماكن الحدود الثلاثة التي وجدناها في البند (أ)

هم : $\underline{95, 96, 97}$. أي a_{95}, a_{96}, a_{97}

ج) ① $a_{n+1} = a_{96} = -2$ هو الحد الاوسط في المتوالية كلها

وبما انه موجود في الحد 96 اذاً يوجد 95 حد قبله و 95

حد بعده . من هنا عدد الحدود الكلي في المتوالية :

$$n_t = 96+95 = \boxed{191 \text{ حد}}$$

② الفرق بين كل حد فردي والحد الفردي الذي يليه هو :

$$a_{n+2} - a_n = 2d = 2(-2) = \underline{-4}$$

$$a_1 = 189$$

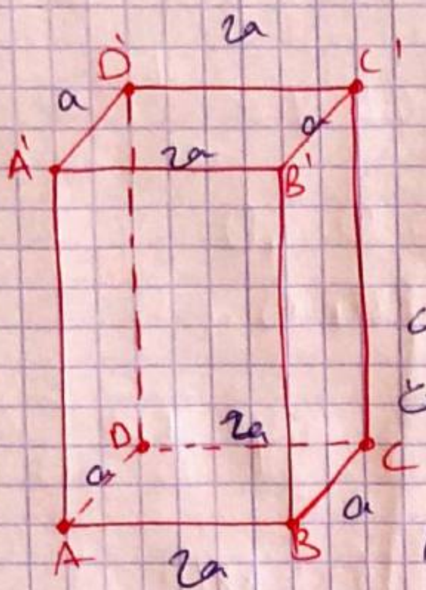
عدد الحدود في الاماكن الفردية

$$\frac{191+1}{2} = 96$$

$$S = \frac{\frac{n+1}{2}}{2}\left(2a_1 + 2d\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\right)$$

$$S = \frac{96}{2}\left(\overbrace{2(189)}^{378} \overbrace{-4(96-1)}^{-380}\right) = \frac{96(-2)}{2} = \boxed{-96}$$

السؤال الثاني :



$AB=2a,\ BC=a$

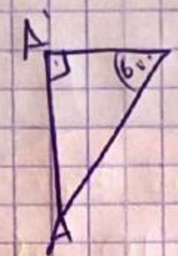
$\measuredangle AC'A' = 60^\circ$

(أ) المستقيم الذي يعامد مستقيمين في المستوى يعامد كل المستقيمات التي تمر بكعبه , من هنا

بما أن $AA' \perp A'D'\ ,\ AA' \perp A'B'$

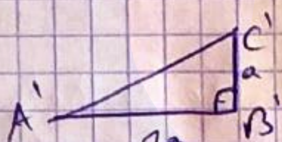
إذا $AA' \perp A'C'$

$\triangle AA'C'$,



نجد $A'C'$ بدلالة a :

$\triangle A'B'C'$,



حسب فيثاغورس :

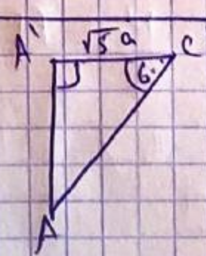
$$(2a)^2 + a^2 = (A'C')^2$$

$$4a^2 + a^2 = A'C'^2$$

$$\sqrt{5a^2} = \sqrt{A'C'^2}$$

$$\boxed{A'C' = \sqrt{5}a}$$

$\triangle AA'C'$,



$$\tan(60^\circ) = \frac{AA'}{A'C'}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{AA'}{\sqrt{5}a}$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}a = AA'$$

إذاً ارتفاع الصندوق : $\boxed{AA' = \sqrt{15}a}$

ب) مجموع مساحات الاوجه الجانبية هي : $30\cdot\sqrt{15}$

اي يتحقق :

$$30\cdot\sqrt{15} = 2\cdot A'A\cdot AB + 2\cdot B'B\cdot BC$$

$$30\cdot\sqrt{15} = 2\cdot\sqrt{15}a\cdot 2a + 2\cdot\sqrt{15}a\cdot a$$

$$\cancel{30}\cdot\cancel{\sqrt{15}} = 2\cancel{\sqrt{15}}a^2(\overbrace{2+1}^{3})$$

$$\cancel{15} = a^2\cdot 3$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{5}$$

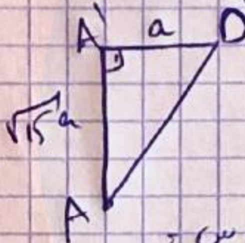
$$\boxed{a = \sqrt{5}}$$

ج) $AD \perp AB$, $AB \perp AA'$ اذا $AB \perp AD'$.

المطلوب : $\measuredangle AD'B = ?$

نجد AD' :

في $\Delta AA'D'$:



حسب فيثاغورس :

$$(AD')^2 = AA'^2 + A'D'^2$$

$$(AD')^2 = 15a^2 + a^2$$

$$\sqrt{(AD')^2} = \sqrt{16a^2}$$

$$\boxed{AD' = 4a} = \boxed{4\cdot\sqrt{5}}$$

في $\Delta AD'B$:

$$\tan(\measuredangle AD'B) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}$$

$$\tan(\measuredangle AD'B) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\measuredangle AD'B = 26.565^\circ}$$

(د) $AD' \perp D'C'$, $BC' \perp C'D'$

بالتالي مساحة الشكل $AD'C'B$:

$$S_{AD'C'B} = AD' \cdot D'C' = 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 8 \cdot 5 = \boxed{40}$$

وحدات مساحة

السؤال الثالث :

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 4x + 4\cos(2x) - 2$

$f'(x) = 4 + 4[-\sin(2x)\cdot 2]$ (P)

$f'(x) = 4 - 8\sin(2x)$

: $f'(x) = 0$

$0 = 4 - 8\sin(2x)$

$:8 / \ 8\sin(2x) = 4$

$\sin(2x) = \frac{1}{2}$

$2x = 150 + 2\pi k$ (II) | $2x = 30 + 2\pi k$ (I)

$x = 75^\circ + \pi k$	$x = 15^\circ + \pi k$	
$\boxed{x = 75^\circ}$	$\boxed{x = 15^\circ}$	$k = 0$
$\boxed{\cancel{x = 255}}$ خارج المجال	$\boxed{\cancel{x = 195^\circ}}$ خارج المجال	: $k = 1$
$\boxed{\cancel{x = -105}}$ خارج المجال	$\boxed{\cancel{x = -165}}$ خارج المجال	: $k = -1$

	$x = 0$	$0 < x < \frac{\pi}{12}$ ($x = 10^\circ$)	$x = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ($x = \frac{\pi}{6}$)	$x = 75^\circ = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2}$ ($x = 82.5$)	$x = \frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$	min	↗	max	↘	min	↗	max

$f'(10) = 4 - 8\sin(20) = +$ $f'(82.5) = 4 - 8\sin(2 \cdot 82.5) = +$

$f'(\frac{\pi}{6}) = 4 - 8\sin(60) = -$

$f(0) = 4\cdot \overset{0}{0} + 4\overset{4}{\cos(0)} - 2 = 2$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cdot\frac{\pi}{12} + 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 2\right) - 2 = 2.511$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{4\cdot 5\pi}{12} + 4\cdot\cos\left(\frac{5\pi\cdot 2}{12}\right) - 2 = -0.228$

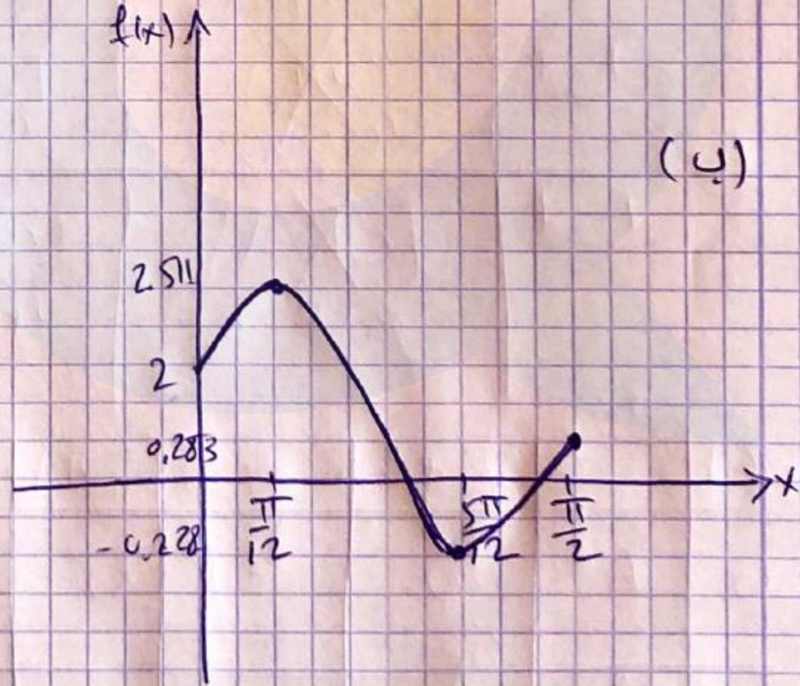
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\cdot\pi}{2} + 4\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) - 2 = 0.283$

$\boxed{(0, 2)\ \text{min}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{12}, 2.511\right)\ \text{max}}$

$\boxed{\left(\frac{5\pi}{12}, -0.228\right)\ \text{min}}$

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}, 0.283\right)\ \text{max}}$



(ب)

(ج) نفسر العلاقة بين $f'(x)$ و $f(x)$.

$f'(x)<0$ عندما $f(x)$ تنازلية .

من هنا: $f'(x)<0$ في المجال:

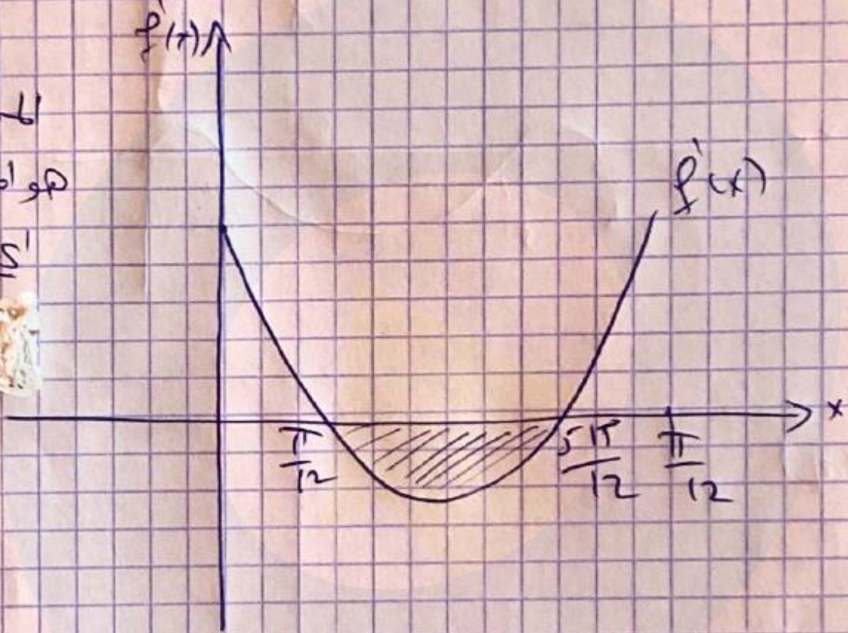
$$\boxed{\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}}$$

(د) النقاط القصوى للدالة هي نقاط الصفرية .

$f'(x): (\frac{\pi}{12},0) , (\frac{5\pi}{12},0)$

المجال الموجب للدالة $f'(x)$
هو المجال التصاعدي للدالة $f(x)$

$\frac{5\pi}{12}<x<\frac{\pi}{2}$ // $0\le x<\frac{\pi}{12}$



(هـ) المساحة المخططة هي المطلوبة:

(نضرب بناقص لأن المساحة تحت محور x) $-\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} f'(x)\,dx = -f(x)\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}$

$S=-\left(f(\frac{5\pi}{12})-f(\frac{\pi}{12})\right)=-(-0.228-2.511)=\boxed{2.739}$

وحدات مساحة

السؤال الرابع:

$a>0$, $f(x)=e^{3x}+3e^{4-x}+a$.

$f'(x)=e^{3x}\cdot 3+3(-1)\cdot e^{4-x}$ (p)

3/ $0=3e^{3x}-3e^{4-x}$

$0=e^{3x}-e^{4-x}$

$e^{4-x}=e^{3x}$

$\Downarrow$

$3x=4-x$

$4x=4$

$\boxed{x=1}$

	① $x<1$	$x=1$	② $x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(0)=3e^{0}-3\cdot e^{4-0}=3-3\cdot e^{4}=-$

$f'(2)=3\cdot e^{6}-3\cdot e^{4-2}=3e^{6}-3e^{2}=+$

$\boxed{x=1}$ احداثي x للنقطة القصوى ونوعها min

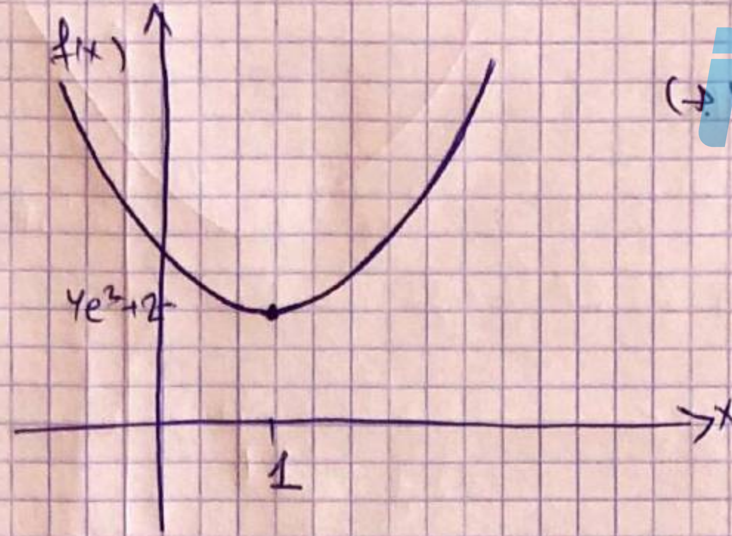
ب) البعد عن محور x هو y-نقطة أي الأحداثي y للنقطة القصوى

أي يتحقق: $4e^{3}+2=e^{3}+3e^{4-1}+a$

$4e^{3}+2=\cancel{4e^{3}}+a$

$\boxed{2=a}$

(ج)



(د) $g(x) = -f(x)$

① نجد احداثي x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$:

$$g'(x) = -f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

من هنا:

$$x = 1$$

$$g(1) = -f(1) = -(\overset{4e^3}{\overbrace{e^3 + 3e^{4-1}}} + 2) = \boxed{-4e^3 - 2}$$

نجد نوع النقطة القصوى:

	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$-f'(x) = g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	max	↘

$g'(0) = -f'(0) = (-)(-) = +$

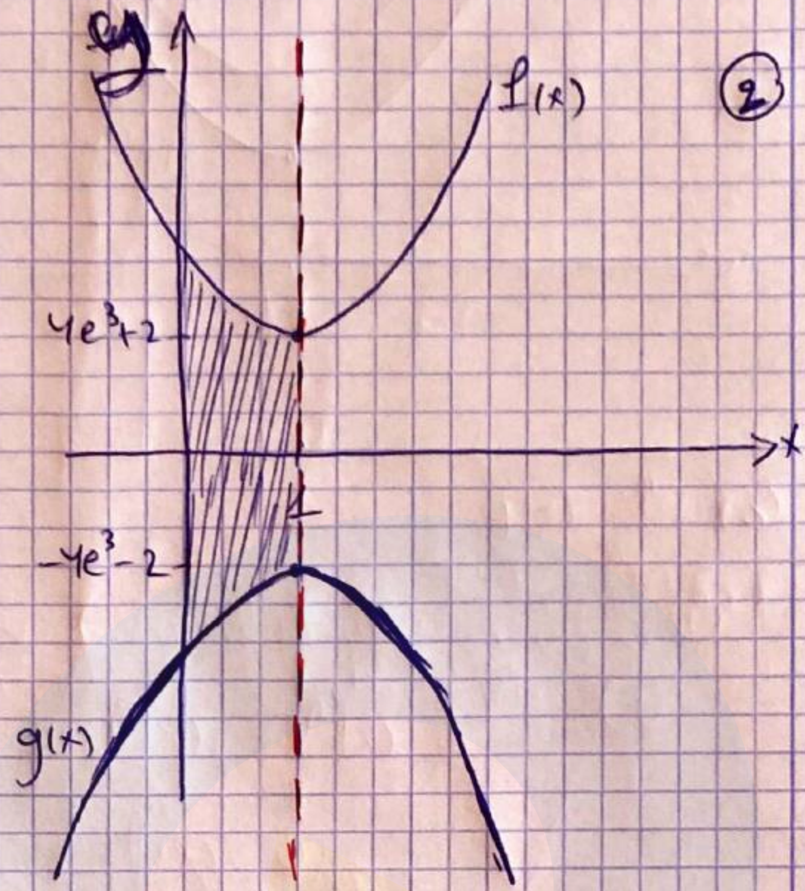
* $f'(0)$ وجدناها سابقاً في البنود السابقة.

$g'(2) = -f'(2) = - \cdot + = -$

* $f'(2)$ وجدناها في البنود السابقة

من هنا : النقطة القصوى للدالة $g(x)$: $\boxed{\max(1, -4e^3-2)}$

2



(هـ) من البند السابق نستنتج ان المجالات التنازلية لدالة $f(x)$ هي مجالات تصاعدية لدالة $g(x)$ ، والمجالات التصاعدية لدالة $f(x)$ هي مجالات تنازلية لدالة $f(x)$.

المستقيم معادلته : $\underline{\underline{x=1}}$

المساحة المخططة هي المساحة المطلوبة نفرضها S.

$$S=\int_0^1 f(x)+\int_0^1 -g(x)=$$

* $\int -g(x)$ ـ وذلك لان الدالة موجودة تحت محور x.

$$S=\int_0^1 f(x)+\int_0^1 -(-f(x))=$$

$$\int_0^1 f(x)+\int_0^1 f(x)=\boxed{2\cdot\int_0^1 f(x)}$$

$$S = 2\cdot\int_0^1 e^{3x}+3e^{4-x}+2\,dx = 2\cdot\left|\ \frac{e^{3x}}{3} - 3e^{4-x} + 2x\ \right|_0^1$$

$$S = 2\cdot\left[\left(\frac{e^3}{3} - 3e^3 + 2\right) - \left(\frac{e^0}{3} - 3\cdot e^4 + \cancel{2\cdot 0}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{e^3}{3} - 3e^3 + 2 - \frac{1}{3} + 3e^4\right] = 2\left[\frac{\overbrace{e^3 - 9e^3}^{-8e^3} + \overbrace{6-1}^{5} + 9e^4}{3}\right]$$

$$= \frac{-16e^3 + 10 + 18e^4}{3}.$$

المساحة المطلوبة

$$\boxed{S = \frac{18e^4 - 16e^3 + 10}{3}}$$

وحدات مساحة

السؤال الخامس :-

$b>0$, $f(x)=\frac{bx}{1+\ln(x)}$

(أ) $\boxed{x>0}$ & $1+\ln(x)\neq 0$

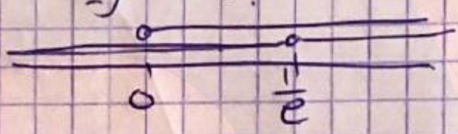
$\ln(x)\neq -1$

$x\neq e^{-1}$

$\boxed{x\neq \frac{1}{e}}$

اذًا مجال التعريف $x>0$ & $x\neq\frac{1}{e}$ أي

$\boxed{0<x<\frac{1}{e}}$ وأيضًا $\boxed{x>\frac{1}{e}}$



(ب) $f'(x)=\frac{b(1+\ln(x))-\frac{1}{\cancel{x}}\cdot b\cancel{x}}{(1+\ln x)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cancel{b}+b\ln(x)-\cancel{b}}{(1+\ln x)^2}=0$

$f'(x)=b\ln(x)=0$

بما أن $b>0$ اذًا

$\ln(x)=0$

$\boxed{x=1}$

	0.1		0.7		2
	$0<x<\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	−	//	−	0	+
$f(x)$	↘	//	↘	min	↗

$f'(0.1)=b\cdot\ln(0.1)=+\cdot-=-$

$f'(0.7)=b\cdot\ln(0.7)=+\cdot-=-$

$f'(2)=b\cdot\ln(2)=+\cdot+=+$

نجد احداثي y للنقطة القصوى:

$$f(1) = \frac{b\cdot 1}{1+\ln(1)} = \frac{b}{1} = \underline{b}$$

اذا النقطة القصوى للدالة $f(x)$: $\boxed{\min(1, b)}$

ج) من الجدول في البند السابق:

<u>المجالات التنازلية</u>:

$\boxed{\frac{1}{e} < x < 1}$ و $\boxed{0 < x < \frac{1}{e}}$

<u>المجال التصاعدي</u>:

$$\boxed{x > 1}$$

د) $y=3$ مماس للدالة $f(x)$.

① بما ان ميل المستقيم صفر، وميل المماس نجده بواسطة المشتقة (جواب المشتقة هو ميل المماس).

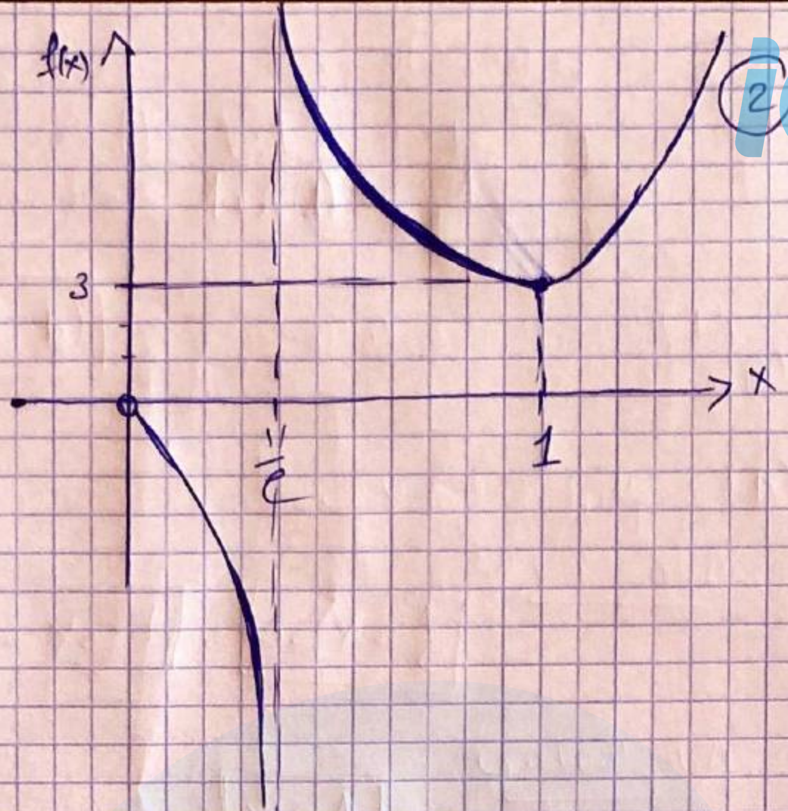
ولقد وجدنا انه عندما يكون $x=1$ اذا ان $f'(1)$ اي ميل المماس للنقطة التي فيها الاحداثي $x=1$ هو صفر، بالتالي $y=3$ يمس الرسم البياني للدالة $f(x)$ في النقطة القصوى.

من هنا نستنتج ان احداثي y للنقطة القصوى هو 3 (وذلك لان معادلة المماس $y=3$).

<u>اي</u>:

$$f(1) = b = 3$$

$$\boxed{b = 3}$$



$x = \frac{1}{e}$ خط تقارب عامودي ؛

$f(\frac{1}{e}) = \frac{3 \cdot \frac{1}{e}}{1+\ln(\frac{1}{e})} = \frac{\frac{3}{e}}{0} = \frac{\text{عدد}}{0}$ خط تقارب عامودي.

ثقب عند x: [illegible]

$f(0) = \frac{0}{0} =$ ثقب

(ه) $g(x) = f(x) - 4$

1. $g'(x) = f'(x) = 0$

من هنا، احداثي x للنقاط القصوى للدالة $g(x)$ هي ذاتها احداثي x للنقاط القصوى للدالة $f(x)$.

أي $\underline{x = 1}$.

وبما أنّ $f'(x) = g'(x)$ اذاً نوع النقطة القصوى للدالتين هو نفسه

$g(1) = f(1) - 4 = 3 - 4 = \underline{-1}$

النقطة القصوى للدالة $g(x)$:

$\boxed{(1,-1)\ \text{min}}$

② بما ان $g(x)=f(x)-4$ اذا $g(x)$ عبارة عن ازاحة للدالة $f(x)$
بـ 4 وحدات للاسفل على محور y.

اذا الرسم الذي يطابق هذه الصفة والنقطة القصوى له هي $min(1,-1)$

هو $\boxed{\text{رسم III}}$