حل نموذج بجروت

582 (807)

موعد صيف خاص

2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1

أ- نفرض ان النقطة (x_m, y_m) تقع على المحل الهندسي المطلوب

اذاً يتحقق:

$$\sqrt{(x_m-a)^2+(y_m+1)^2}=\sqrt{(x_m+a)^2+(y_m-1)^2}$$

ونفك الاقواس $(\;)^2$ $\qquad (\;)^2$

$$(\cancel{x_m^2}-2ax+a^2)+(\cancel{y_m^2}+2y_m+1)=(\cancel{x_m^2}+2ax_m+a^2)+(\cancel{y_m^2}-2y_m+1)$$

$$-2ax_m+\cancel{a^2}+2y_m\cancel{+1}=2ax_m+\cancel{a^2}-2y_m\cancel{+1}$$

$$2y_m+2y_m=2ax_m+2ax_m$$

$$4y_m=4ax_m \Rightarrow y_m=ax_m$$

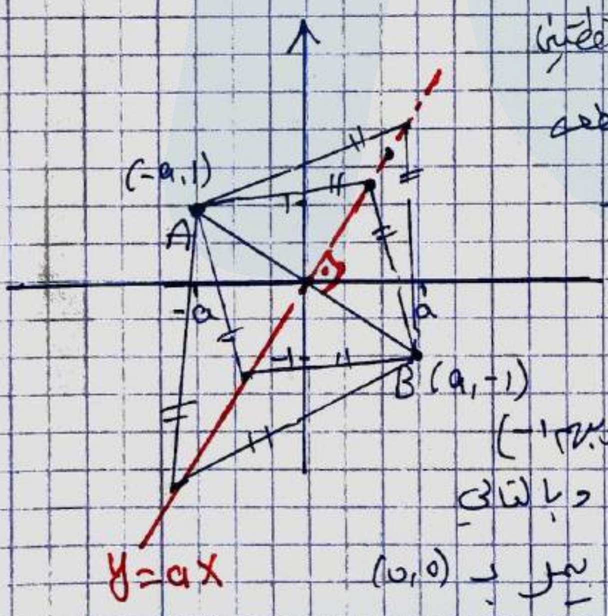
اذاً المحل الهندسي هو مستقيم معادلته $\boxed{y=ax}$

* تفسير هندسي بياني للوضع المعروف بالسؤال:

نعين النقاط $(a,-1)$ و $(-a,1)$ في هيئة محاور

AB هي القطعة التي تصل بين النقطتين

النقاط التي بعدها عن اطراف القطعة متساوٍ هي نقاط تقع على العمود المتوسط للقطعة (الخط المتقطع)



ميل القطعة AB هو $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{a}$

وميل المستقيم هو a (حاصل ضربهم -1)

منتصف القطعة AB هي $(0,0)$ وبالتالي المستقيم العامد (العمود المتوسط) يمر بـ $(0,0)$

وبالتالي معادلته $y=ax$

ب- $y=-ax$ والمستقيم $y=ax$ متعامدان اذا تحقق $-a\cdot a=-1$

$\Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \boxed{a=\pm 1}$

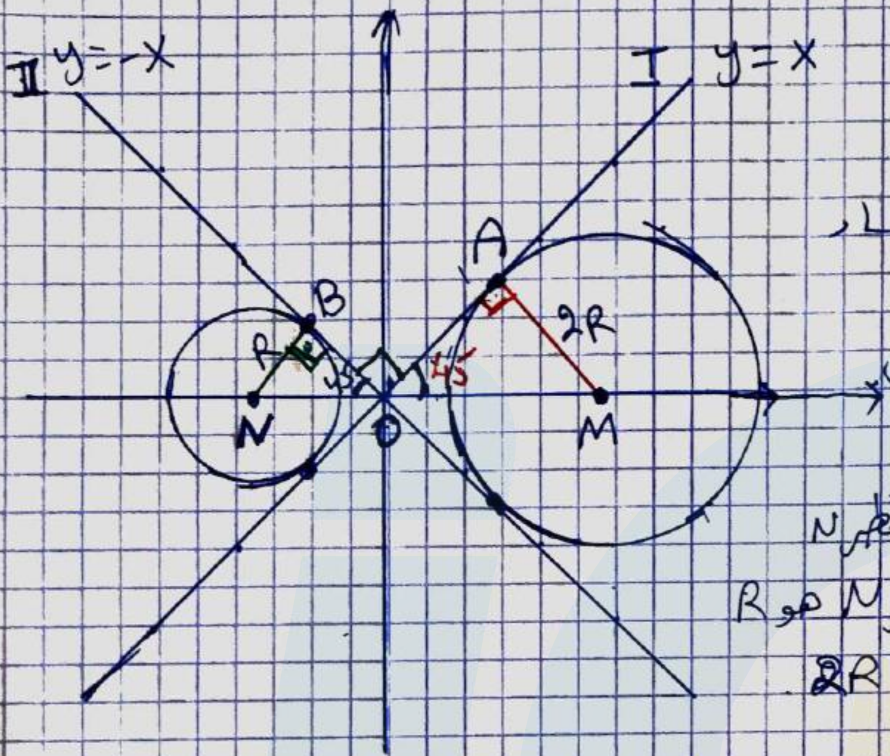
انا يتعامد المستقيمان اذا تحقق ان:

$\boxed{a=-1}$ او $\boxed{a=1}$

ج) معادلة المستقيمات هي

$I\ y=x \qquad II\ y=-x$

نرسم المستقيمات والدائرتان في نفس هيئة المحاور لحسب المعطيات:



- الدائرة M تقع على يمين المحور y.
- الدائرة N تقع على يسار المحور y
- البعد بين مراكز الدائرتين هو 6 وحدات

نصف قطر الدائرة M ضعف نصف قطر N

أي اذا رمزنا نصف قطر N هو R

اذاً نصف قطر N هو $2R$.

نفرض ان A هي نقطة التماس بين المستقيم $y=x$ والدائرة M

احداثيات A من الصورة $A(x_A,y_A)$ او $A(x_A,x_A)$

واحداثيات $M(x_M,0)$. زاوية A , $\measuredangle A=90$ المماس عمودي على نصف القطر

نفرض ان B هي نقطة تماس الدائرة N مع المستقيم $y=-x$

احداثيات $B(x_B,y_B)$ او $B(x_B,-x_B)$ وزاوية B , $\measuredangle B=90^\circ$.

نفرض $\measuredangle AOM=\alpha$ اذاً تتحقق $tg\alpha=1 \Leftarrow \alpha=45^\circ$

وينتج أن $\measuredangle OMA=45^\circ$.

المستقيمين I و II متعامدين لذلك الزاوية بينهم 90°

وبالتالي $\measuredangle BOM+90+45=180$ (زاوية مستقيمة)

$\Longrightarrow \measuredangle BOM=45^\circ$

وبالتالي نستنتج أن $\measuredangle BNO=45^\circ$ والمثلثان متشابهان

أي $\Delta AOM \sim \Delta BNO$ ومن التشابه يتحقق

$$\frac{\overset{R}{BN}}{\underset{2R}{AM}}=\frac{ON}{OM} \Longrightarrow \frac{R}{2R}=\frac{ON}{OM} \Longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{ON}{OM} \Longrightarrow \boxed{OM=2ON}$$

البعد بين M و N هو 6 وحدات لذلك

$$ON + OM = 6$$

$$ON + 2ON = 6 \Rightarrow 3ON = 6 \Rightarrow ON = 2$$

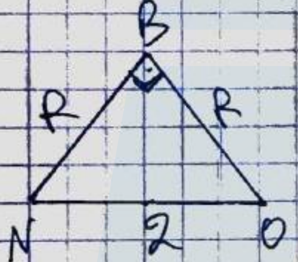
وبالتالي $OM = 2ON = 4$

اذن $\boxed{ON = 2}$ $\boxed{OM = 4}$

ومركز الدائرة M هو $M(0,4)$ مركز الدائرة N هو $N(-2,0)$

نجد R

في المثلث NBO المتساوي الساقين يتحقق:



$$\Rightarrow R^2 + R^2 = 2^2 \Rightarrow 2R^2 = 4 \Rightarrow \boxed{R^2 = 2}$$

اذن معادلة الدائرة N هي:

$$(x-(-2))^2 + y^2 = R^2$$

$$\boxed{(x+2)^2 + y^2 = 2}$$

ومعادلة الدائرة M هي

$$(x-4)^2 + y^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

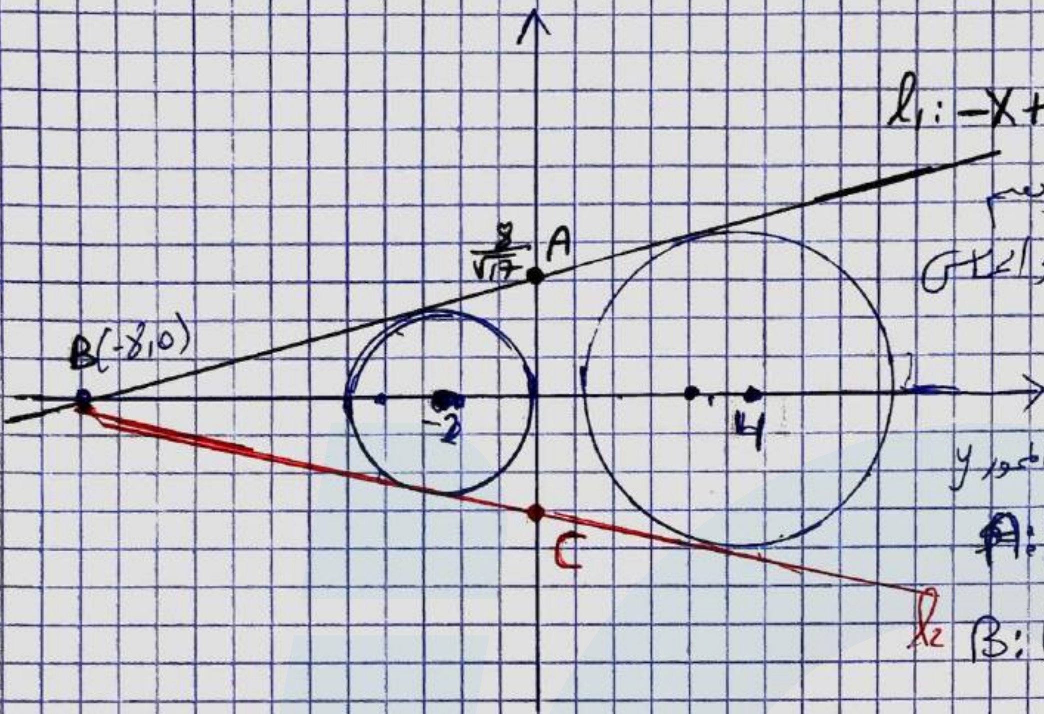
$$\Rightarrow \boxed{(x-4)^2 + y^2 = 8}$$

للتلخيص:

$$\boxed{\begin{array}{l} N: (x+2)^2 + y^2 = 2 \\ M: (x-4)^2 + y^2 = 8 \end{array}}$$

د. معطى أنّ المستقيم $-x+\sqrt{17}y-8=0$ يمس الدائرتين

نرسم المستقيم والدائرتين بعد أن حصلنا على معادلاتهم



الوضع المبيّن بالرسم يصف الدائرتين والمماس المشترك.

المماس المشترك يقطع المحور x والمحور y في النقاط $A:(0,\frac{8}{\sqrt{17}})$ و $B:(-8,0)$

المماس المشترك الثاني المطلوب بالسؤال يمكن الحصول عليه بواسطة رسم مستقيم مماثل للمستقيم (المماس) المعطى بالنسبة للمحور x. أي ينطلق من النقطة B ويمس الدائرتين

اذا المماس الثاني مماثل بالنسبة للمحور x للمماس الأول ويمر بـ $B(-8,0)$ ويقطع المحور x بالنقطة C.

النقطة C مماثلة للنقطة A بالنسبة للمحور x وهذا معناه أن الإحداثي y للنقطة C هو المضاد للإحداثي y للنقطة A أي $C:(0,-\frac{8}{\sqrt{17}})$

اذا l_2 - المماس الثاني يمر بـ $(-8,0)$ ويقطع المحور y بـ $C(0,-\frac{8}{17})$ وبالتالي معادلته من الصورة

$$y=mx-\frac{8}{\sqrt{17}}$$

نجد m

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0-\left(-\frac{8}{\sqrt{17}}\right)}{-8-0}=\frac{\frac{8}{\sqrt{17}}}{-8}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

اذا معادلة المماس الثاني:

$$\boxed{y=-\frac{1}{\sqrt{17}}x-\frac{8}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{17}y+x+8=0}$$

السؤال 2

أ. بحسب المعطيات $ABCA'B'C'$ موشور قائم قاعدته مثلث

معلوم ان

$\vec{AA'} = (K-1, K-7, K+1)$ بحيث K عدد.

$\vec{AC} = (K+1, 0, K-3)$

$\vec{AB} = (K-1, K, 3)$

بما ان الموشور قائم لذلك $\vec{AB} \perp \vec{AA'}$ و $\vec{AC} \perp \vec{AA'}$

اي نتحقق:

$\vec{AA'}\cdot\vec{AB}=0$ وايضا $\vec{AA'}\cdot\vec{AC}=0$

$(K-1, K-7, K+1)(K-1, K, 3)=0$ و $(K-1, K-7, K+1)(K+1, 0, K-3)=0$

$(K-1)^2+K(K-7)+3(K+1)=0$ و $(K-1)(K+1)+(K-7)\cdot 0+(K+1)(K-3)=0$

$K^2-2K+1+K^2-7K+3K+3=0$ و $K^2-1+0+K^2+K-3K-3=0$

$2K^2-6K+4=0$ و $2K^2-2K-4=0$

نحل المعادلة حسب الدستور ونحصل على: $K=2$ // $K=1$ و نحل المعادلة حسب الدستور ونحصل على: $K_1=2$ // $K_2=-1$

وبما ان K يجب ان يحقق المعادلتين لكي يكون $\vec{AA'}$ عموديا على $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ايضا اذاً $\boxed{K=2}$

ب. بحسب المعطيات المستقيم الذي يقع عليه $\vec{AC}$ هو

$l_{AC}: \underline{X}=(8,-1,-1)+t(K+1, 0, K-3)$

$l_{AC}: \underline{X}=(8,-1,-1)+t(3,0,-1) \Leftarrow K=2$

و $\vec{AC}=(3,0,-1)$ المتجه الاتجاهي للمستقيم l_{AC}.

بنفس الاسلوب بالنسبة لـ l_{BC}:

$l_{BC}: \underline{X}=(4,0,2)+m(K,-K,-4)$

$l_{BC}: \underline{X}=(4,0,2)+m(2,-2,-4)$

ب. المستويين ABC و $A'B'C'$ مستويين متوازيين
ولذلك معادلاتهم من الصورة

$$\Pi_{ABC} = ax+by+cz+d=0$$

$$\Pi_{A'B'C'} = ax+by+cz+E=0$$

بحيث $\underline{u}=(a,b,c)$ هو متجه معامد للمستويين.

وبما ان المتجه $\overrightarrow{AA'}$ هو ارتفاع الموشور ايضاً
لذلك فهو يعامد المستويين.

$$\overrightarrow{AA'} = (k-1, k-7, k+1) \xRightarrow{\boxed{k=2}} \overrightarrow{AA'} = (1,-5,3)$$

اذاً: $\Pi_{A'B'C'} = x-5y+3z+E=0$

لكي نجد E يجب ان نجد نقطة على المستوى $A'B'C'$
وان نعوضها في معادلة المستوى ومن ثم نجد E.

نجد اولاً النقطة C تقاطع المستقيمين l_{BC} و l_{AC}
ومن ثم نجد C' اذ انه يتحقق $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$ وبهذا
نكون قد وجدنا نقطة C' تقع على $A'B'C'$ ونستطيع
ايجاد E بالمعادلة.

C هي تقاطع l_{AC} و l_{BC}

نقطة ممثلة على AC (لـ t ما) من الصورة:
$(8+3t, -1, -1-t)$

نقطة ممثلة على BC (لـ m ما) من الصورة:
$(4+2m, -2m, 2-4m)$

بما أن C تقع على المستقيمين (نقطة تقاطع)
لذلك يتحقق: $(8+3t,-1,-1-t)=(4+2m,-2m,2-4m)$

هذه المساواة عبارة عن 3 معادلات

$I \quad 8+3t = 4+2m$

$II \quad -1 = -2m \Longrightarrow \boxed{m=\frac{1}{2}}$

$III \quad -1-t = 2-4m$

من المعادلة II نحصل على $m=\frac{1}{2}$, نعوضها في III

$\Longrightarrow -1-t = 2-4\cdot\frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow \boxed{-1=t}$

نعوض $m=\frac{1}{2}$ و $t=-1$ في واحدة من المعادلات الممثلة التي وجدناها ونجد C ونحصل على

$C:(5,-1,0)$

بما أن $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ لذلك يتحقق

$C'-C = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$

$(c_1', c_2', c_3') - (5,-1,0) = (1,-5,3)$

$(c_1'-5) = 1 \Longrightarrow \boxed{c_1'=6}$

$(c_2'-(-1)) = -5 \Longrightarrow \boxed{c_2'=-6} \Longrightarrow C'(6,-6,3)$

$c_3'-0 = 3 \Longrightarrow \boxed{c_3'=3}$

نعوض في معادلة المستوى ونجد E

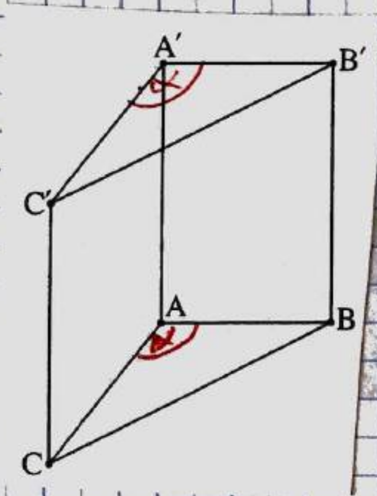
$\pi_{AB'C'}: X-5Y+3Z+E=0$

$6-5\cdot(-6)+3\cdot3+E=0 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow E=45$

$$\boxed{\pi_{AB'C'} = X-5Y+3Z-45=0}$$

ب- بما أن الموشور قائم اذاً القاعدتين
متطابقتين وهذا معناه أن

$$\measuredangle C'A'B' = \measuredangle CAB$$



بواسطة المتجهات $\vec{AB}$, $\vec{AC}$

نستطيع حساب $\alpha = \measuredangle CAB$

$\vec{AC} = (3,0,-1)$ $\vec{AB} = (1,2,3)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AC}|}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{3^2+0^2+1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{(1,2,3)(3,0,-1)}{\sqrt{14}\,\sqrt{10}} = \frac{3+0-3}{\sqrt{140}} = \frac{0}{\sqrt{140}} = 0$$

$$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B' = 90^\circ$$

اذاً: $\boxed{\measuredangle C'A'B' = 90^\circ}$

ت. بما أن $A'B'C'$ هو مثلث قائم الزاوية $\measuredangle A' = 90^\circ$
اذاً $C'B'$ هو قطر الدائرة الحاصرة للمثلث وبالتالي
مركز الدائرة هو منتصف $C'B'$. $C'(6,-4,3)$ نجد B' :

لكي نجد B' , نجد اولاً احداثيات A ثم B وبالتالي
$\vec{AA'} = \vec{BB'}$ ونجد B' .

$$\vec{AC} = C - A \Rightarrow (3,0,-1) = (5,-1,0) - (a_1,a_2,a_3)$$

نحلها نحصل على $A:(2,-1,1)$

$$\vec{AB} = B - A = (1,2,3) = (b_1,b_2,b_3) - (2,-1,1)$$

نحلها نحصل على $B = (3,1,4)$

نجد الرأس B'

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overbrace{(B'_1, B'_2, B'_3)}^{B'} - \overbrace{(3,1,4)}^{B} = \overbrace{(1,-5,3)}^{\overrightarrow{AA'}}$$

نحل المعادلات ونجد B' نحصل على

$B': (4,-4,7)$

اذاً: $B'(4,-4,7)$ و $C'(6,-6,3)$

مركز الدائرة هو منتصف $B'C'$

$$X_0 = \frac{X_{B'} + X_{C'}}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$y_0 = \frac{y_{B'} + y_{C'}}{2} = \frac{-6-4}{2} = -5$$

$$z_0 = \frac{z_{B'} + z_{C'}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

اذاً: مركز الدائرة المحسوبة للمثلث $A'B'C'$ هو

$$\boxed{O(5,-5,5)}$$

سؤال 3

$$w^2 - 4i\cdot w - 4 + 2i = 0 \Longrightarrow w^2 - 4i + (2i-4) = 0$$

$a = 1 \qquad b = -4i \qquad c = (2i-4)$

$$w_{1,2} = \frac{-(-4i) \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4(1)(2i-4)}}{2\cdot 1} = \frac{4i \pm \sqrt{-16-8i+16}}{2}$$

$$= \frac{4i \pm \sqrt{-8i}}{2}$$

نجد $\sqrt{-8i} = ?$

$\sqrt{-8i} = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

$(\;)^2 \to -8i = (x+iy)^2 = x^2 + 2xy\,i - y^2$

$$-8i = x^2 - y^2 + 2xy\cdot i$$

$2xy = -8 \qquad\qquad x^2 - y^2 = 0$

$\boxed{x\cdot y = -4} \qquad\qquad x^2 = y^2 \Longrightarrow \boxed{x = \pm y}$

نعوض في $x\cdot y = -4$ نحصل على:

$x(-x) = -4$ او : $x\cdot(x) = -4$

$-x^2 = -4 \Longrightarrow x^2 = 4$; $x^2 = -4$ غير ممكن لان x حقيقي و x^2 موجب

$x = \pm 2 \to y = \mp 2$

I $\sqrt{-8i} = 2 - 2i$

II $\sqrt{-8i} = -2 + 2i$

نعوض ونجد w_1 و w_2:

$$w_1 = \frac{4i + \overbrace{2-2i}^{2+2i}}{2} \Longrightarrow (1+i) \Longrightarrow \boxed{w_1 = 1 + i}$$

$$w_2 = \frac{4i + (-2+2i)}{2} \Longrightarrow \frac{6i-2}{2} \Longrightarrow \boxed{w_2 = -1 + 3i}$$

ب. $z^3 = a+bi$

بحسب المعطيات احد الحلول يقع على المحور التخيلي بالجزء السالب

اي ان احد الحلول من الصورة $k\cdot i$ بحيث k حقيقي سالب

وبالتالي يتحقق :-

$$(ki)^3 = a+bi$$

$$k^3 (i)^3 = a+bi \Rightarrow -k^3 i = a+bi$$

اذاً $a=0$ و $\underbrace{-k^3}_{\text{موجب}} = b$ لان k سالب

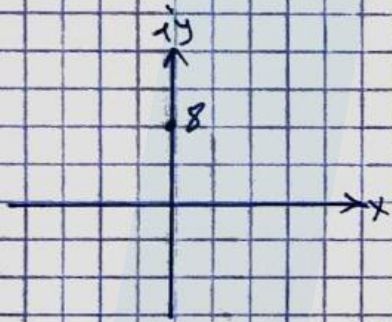
لذلك $a=0$ و $b>0$ والاجابة هي ①.

ج. $II: z^3 = 2(w_1+w_2)$

$$2(w_1+w_2) = 2(1+i-1+3i) = 2\cdot 4i = 8i$$

اذاً المعادلة هي:

$$z^3 = 8i$$



$$8i = 8\,cis\,90$$

وبالتالي المعادلة هي:

$$z^3 = 8\,cis\,90$$

وبحسب ديموافر حلول المعادلة تحقق

$\boxed{k=0,\dots,(n-1)}$ $\quad z_k = \sqrt[3]{8}\,cis\left(\frac{90}{3}+\frac{360k}{3}\right) = 2\,cis(30+120k)$

$k=0 \rightarrow z_0 = 2\,cis\,30 = \sqrt{3}+i$

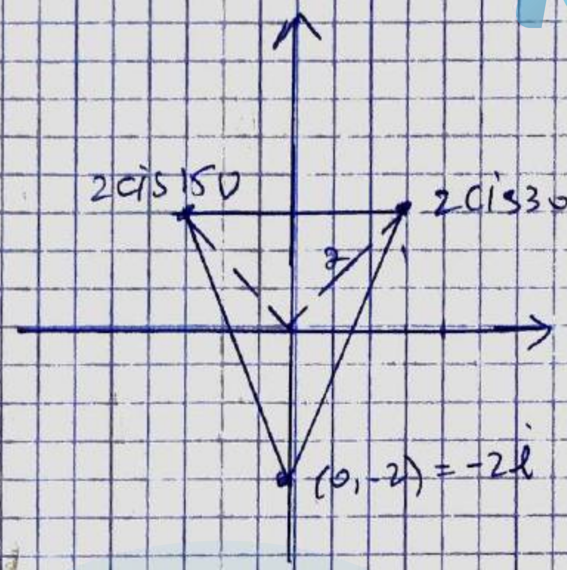
$k=1 \rightarrow z_1 = 2\,cis(30+120\cdot 1) = 2\,cis\,150 = -\sqrt{3}+i$

$k=2 \rightarrow z_2 = 2\,cis(30+120\cdot 2) = 2\,cis\,270 = -2i$

اذاً حلول المعادلة II هي:-

$2\,cis\,30$ // $2\,cis\,150$ // $2\,cis\,270$

$\sqrt{3}+i$ $\quad -\sqrt{3}+i$ $\quad -2i$



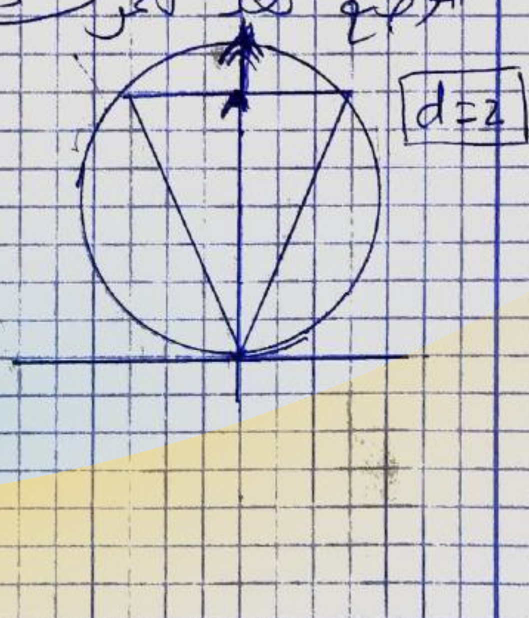
ج- المثلث المرسوم في البند (د) رؤوسه تقع على محيط دائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها 2.

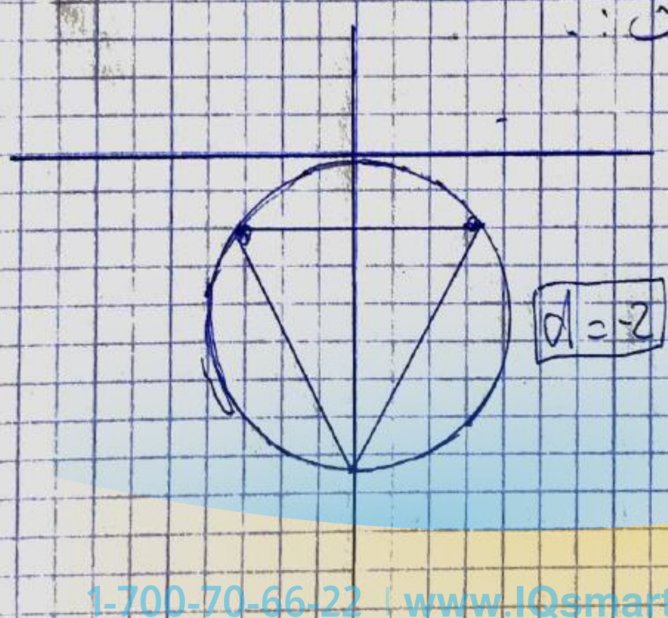
اذا جمعنا العدد التخيلي di لكل واحد من الحلول فإن هذه العملية ستحرك المثلث الى اسفل او الى أعلى (ازاحة عمودية) بمقدار d وحدات.

وبالتالي لكي تمر الدائرة التي تحصر المثلث الجديد يجب ازاحتها بمقدار وحدتين الى الاسفل او الى الأعلى وهذا سيضمن انها ستمر ب (0,0)

$\boxed{\text{اي } d=2 \text{ أو } d=-2}$

الوضع بعد تحرك المثلث:





$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

1.أ مجال تعريف الدالة $e^{x}+e^{-x}\neq 0$

e^{x} موجب دائماً و e^{-x} موجب دائماً وبذلك مجموعهم لن يكون صفر أبداً وبالتالي الدالة معرفة لكل x.

2.أ

خطوط تقارب عمودية لا يوجد.

خطوط تقارب أفقية:

$$x\to+\infty \Rightarrow \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}-0}{e^{x}+0}=\frac{e^{x}}{e^{x}}=1$$

$y=1$ هو خط تقارب أفقي عندما يقترب x من $+\infty$

$$x\to-\infty \Rightarrow \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{0-e^{-x}}{0+e^{-x}}=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}}=-1$$

اذاً $y=-1$ هو خط تقارب افقي للدالة عندما $x\to-\infty$

للتلخيص: خطوط التقارب الافقية: $y=1$ ($x\to+\infty$) ، $y=-1$ ($x\to-\infty$)

3.أ

$$f'(x)=\frac{\left(e^{x}-(-1)\cdot e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(e^{x}+(-1)\cdot e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}=\frac{\cancel{e^{2x}}+2e^{x}e^{-x}+\cancel{e^{-2x}}-\left(\cancel{e^{2x}}-2e^{x}e^{-x}+\cancel{e^{-2x}}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{x}e^{-x}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}=\frac{4\cdot e^{0}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}=\frac{4\cdot \overset{1}{e^{0}}}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}=\frac{4}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}$$

:14 اذاً

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}}$$

وبما ان البسط عدد موجب اذاً لا يوجد نقاط صفرية للمشتقة
وبما ان المقام موجب ايضاً لذلك المشتقة $f'(x)$ موجبة لكل x
وبالتالي الدالة $f(x)$ تصاعدية لكل x

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = (-1)\cdot\frac{(e^{x} - e^{-x})}{e^{-x} + e^{x}} \quad (4)$$

$$= -1 \cdot f(x)$$

اذاً $f(-x) = -f(x)$

والدالة فردية

ب- لكي نرسم الدالة نجد التقاطع مع المحاور

مع $y \Leftarrow x=0$

$$f(0) = \frac{e^{0} - e^{-0}}{e^{0} + e^{-0}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

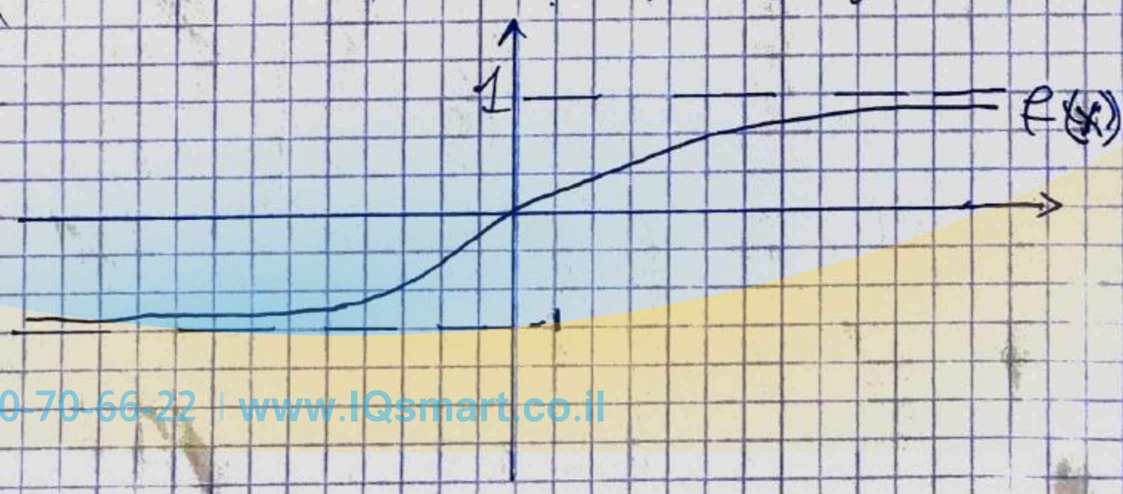
اذاً التقاطع مع y $(0,0)$

مع $x \Leftarrow y=0$

$$0 = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \Rightarrow e^{x} - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

اذاً التقاطع مع x ايضاً بنقطة واحدة فقط $(0,0)$



ج.1

معطى ان $g(x)=ax$ بحيث a براميتر

معطى ان $g(1)=f(1)$

نجد $f(1)$:

$$f(1)=\frac{e^1-e^{-1}}{e^1+e^{-1}}=\frac{e^1-\frac{1}{e}}{e^1+\frac{1}{e}}=\frac{\frac{e^2-1}{\cancel{e}}}{\frac{e^2+1}{\cancel{e}}}$$

$$\boxed{f(1)=\frac{e^2-1}{e^2+1}=g(1)}$$

بذلك

$$g(1)=a\cdot 1=\frac{e^2-1}{e^2+1}\Longrightarrow \boxed{a=\frac{e^2-1}{e^2+1}}$$

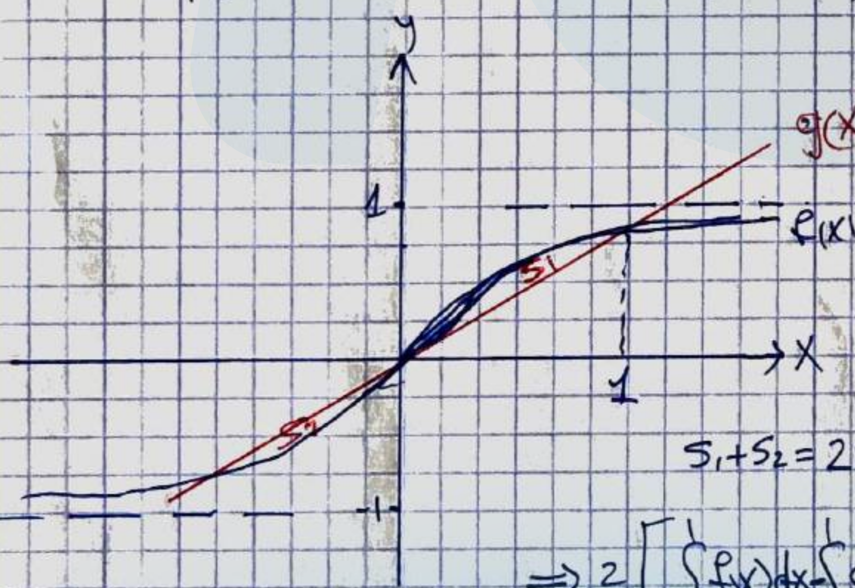
ج.2

الدالة $g(x)=\frac{e^2-1}{e^2+1}x$ هي دالة فردية لانه يتحقق:

$$g(-x)=\frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot(-x)=-1\cdot\frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot x=-g(x)$$

اذا الداله g تحقق $g(-x)=-g(x)$ والدالة فردية

نرسم الرسم البياني للدالتين ونحدد المساحة المطلوبة



المساحة بين الدالتين هي S_1+S_2

ولكن بما ان الدالتين فرديتين لذلك $S_1=S_2$

ويتحقق:

$$S_1+S_2=2S_1=2\int_0^1 f(x)-g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\left[\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)\,dx\right]$$

نحسب كل تكامل على حدة ومن ثم نجد المساحة المطلوبة

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

* نلاحظ ان التكامل المطلوب هو من الصورة:

$$\int_0^1 \frac{K'(x)}{K(x)}\,dx$$

بحيث $K(x)=e^x+e^{-x}$

وعندها $K'(x)=e^x+-1\cdot e^{-x}$

$K'(x)=e^x-e^{-x}$

$\Leftarrow$ البسط $K'(x)$ والمقام $K(x)$

وبالتالي:

$$\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{K'(x)}{K(x)}\,dx = \Big[\ln K(x)\Big]_0^1$$

$$= \Big[\ln(e^x+e^{-x})\Big]_0^1 = \left(\ln(e^1+e^{-1})\right) - \left(\ln(e^0+e^0)\right)$$

$$= \ln\left(e^1+\frac{1}{e}\right) - \ln 2 = \boxed{\ln\left(e+\frac{1}{e}\right) - \ln 2}$$

نحسب الآن التكامل: $\int_0^1 g(x)\,dx$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^2-1}{e^2+1}x\,dx = \left[\frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot\frac{x}{2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{e^2-1}{e^2+1}\cdot\frac{1}{2} - 0 = \frac{e^2-1}{2(e^2+1)}$$

والمساحة المطلوبة هي

$$2\left[\ln\left(e+\frac{1}{e}\right) - \ln 2 - \frac{e^2-1}{2(e^2+1)}\right] = 2\cdot(0.0539) = \boxed{0.1068}$$

$1.1269 - 0.693 - 0.380$

سؤال 5

$$f(x) = x\cdot(\ln x)^n$$

1.أ مجال تعريف الدالة هو المجال الذي فيه $\ln x$ معرفة

أي $x>0$

2.أ $$f'(x) = 1\cdot(\ln(x))^n + x\cdot(\ln(x))^{n-1}\cdot n\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln x)^n + n\cdot(\ln x)^{n-1}$$

$$\boxed{f'(x) = (\ln(x))^{n-1}\left[\ln x + n\right]}$$

نجد نقاط الشك: $f'(x)=0$

$$f'(x)=0 \Longrightarrow (\ln(x))^{n-1}\cdot\left[\ln x+n\right]=0$$

$\ln(x)=0$ أو $\ln x + n = 0$

$\boxed{x=1}$ أو $\ln x = -n \Longrightarrow \boxed{x = e^{-n} = \frac{1}{e^n}}$

اذاً نقاط الشك هي $\boxed{x=\frac{1}{e^n} // x=e^{-n}}$ أو $\boxed{x=1}$

لكي نحدد المجالات التصاعدية والتنازلية نحدد اشارة المشتقة في المجالات الملائمة مع الأخذ بعين الاعتبار n زوجي أو n فردي

التعبير $\ln x + n$

في المجال $0<x<\frac{1}{e^n}$ سيكون سالب دون علاقة ب n زوجي او فردي.

انتبه الى ان التعبير او الدالة $y=\ln x+n$ عبارة عن ازاحة n وحدات الى الأعلى للدالة $\ln x$ والنقطة الصفرية للدالة هي e^{-n} او $\frac{1}{e^n}$ $\left(0<x<\frac{1}{e^n}\right)$ تكون سالبه

وبعدها موجبة اي في المجال $\frac{1}{e^n}<x$ موجب

التحديد $(\ln(x))^{n-1}$

بما أن $\ln x$ في المجال $0<x<1$ سالبة

لذلك نتحقق:

إذا كان n زوجي فإن $(\ln(x))^{\overset{\text{فردي}}{n-1}}$ سيتحقق:

$\boxed{n \text{ زوجي}}$ ← $(\ln x)^{n-1}<0$ في المجال $0<x<1$ و $(\ln(x))^{n-1}>0$ للـ $x>1$

$\boxed{n \text{ فردي}}$ (عندها $(n-1)$ زوجي) وسيتحقق:

$$(\ln(x))^{n-1}>0 \quad \text{لكل} \quad x>0 \quad \text{بحيث} \quad x\neq 1$$

الآن نفحص المجالات التصاعدية والتنازلية بالاعتماد على إشارة مركبات المشتقة كما شرحنا سابقاً

n زوجي

		$\ln x+n<0$, $(\ln(x))^{n-1}<0$		$\ln x+n>0$, $(\ln x)^{n-1}<0$		$\ln x+n>0$, $(\ln x)^{n-1}>0$
x	0	$0<x<\frac{1}{e^n}$	$\frac{1}{e^n}$	$\frac{1}{e^n}<x<1$	1	$1<x$
$f'(x)$	///	$-\cdot-=+$	0	$-\cdot+=-$	0	$+\cdot+=+$
$f(x)$	///	↗	max	↘	min	↗

التلخيص

$\boxed{\text{إذا كان } n \text{ زوجي:}}$ إذاً $x=\frac{1}{e^n}$ מקסימום و $x=1$ מינימום

* المجالات التصاعدية:

$$0<x<\frac{1}{e^n} \quad \text{أو} \quad x>1$$

* المجالات التنازلية:

$$\frac{1}{e^n}<x<1$$

n فردي $(n-1)$ زوجي

x	0	$0<x<\frac{1}{e^n}$	$\frac{1}{e^n}$	$\frac{1}{e^n}<x<1$	1	$x>1$
		$\ln x+n<0$, $(\ln x)^{n-1}>0$		$\ln x+n>0$, $(\ln x)^{n-1}>0$		$(\ln x)^{n-1}>0$, $\ln x+n>0$
$f'(x)$	//	$+\cdot-=-$	0	$+\cdot+=+$	0	$+\cdot+=+$
$f(x)$	//	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

اذا كان n فردي

$x=\frac{1}{e^n}$ מינימום

$x=1$ التواء (פיתול)

مجالات تصاعدية

$\frac{1}{e^n}<x<1$ او $x>1$

مجالات تنازلية

$0<x<\frac{1}{e^n}$

ملاحظة
في حال $n=1$ المركب $(\ln(x))^{n-1}$ في المشتقة غير معرف في $x=1$ اذ نحصل على 0^0 ولكن هذا لن يؤثر على النتائج

للاجمال

	n زوجي	n فردي
مجالات تصاعدية	$0<x<\frac{1}{e^n}$, $x>1$	$x>1$, $\frac{1}{e^n}<x<1$
مجالات تنازلية	$0<x<\frac{1}{e^n}$	$0<x<\frac{1}{e^n}$
نقاط قصوى (التواء)	מקסימום $\left(\frac{1}{e^n},\left(\frac{-n}{e^n}\right)^n\right)$, מינימום $(1,0)$	מינימום $\left(\frac{1}{e^n},\left(\frac{-n}{e^n}\right)^n\right)$, פיתול $(1,0)$

$$f\left(\frac{1}{e^n}\right)=\frac{1}{e^n}\left(\ln\frac{1}{e^n}\right)^n=\frac{1}{e^n}\left(\ln e^{-n}\right)^n=\frac{1}{e^n}\cdot(-n)^n=\frac{-n^n}{e^n}=\left(\frac{-n}{e^n}\right)^n$$

$$f(1)=1\cdot(\ln 1)^{n-1}=1\cdot 0=0$$

3 - أ

n زوجي: $\left(\frac{1}{e^n},\left(\frac{-n}{e^n}\right)^n\right)$ מקסימום // $(1,0)$ מינימום

n فردي: $\left(\frac{1}{e^n},\left(\frac{-n}{e^n}\right)^n\right)$ מינימום // $(1,0)$ פיתול

الحل: ان اذا كان $n=1$ (فردي) ان f بحسب نتائج البند 2.أ

نستنتج ان:

$$f(x)=x\cdot\ln x$$

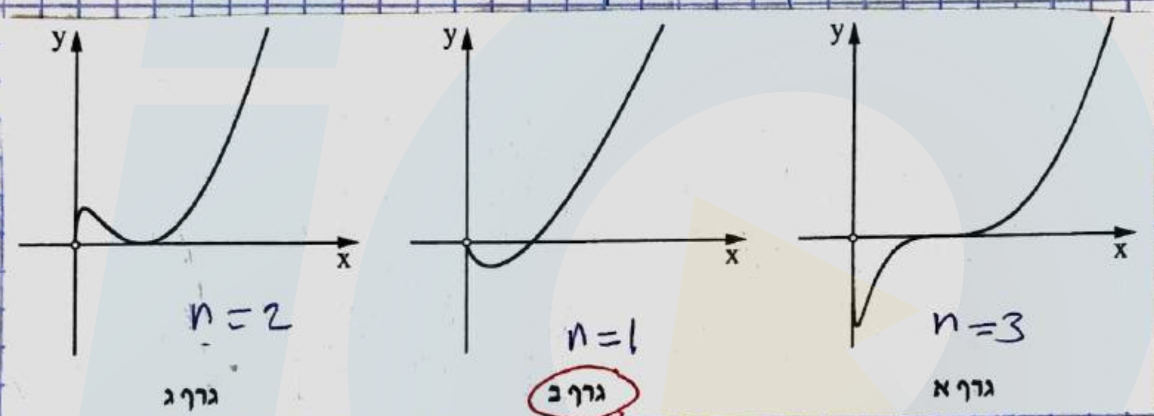
النقطة $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$ ستكون מינימום (اذ מינימום $\left(\frac{1}{e^n},\left(\frac{-n}{e}\right)^n\right)$).

النقطة $(1,0)$ التقاء.

المجالات التصاعدية هي: $\frac{1}{e}<x<1$ أو $x>1$

المجالات التنازلية هي: $0<x<\frac{1}{e}$

وبالتالي الرسم الملائم لهذه الصفات هو رسم (ب)



גרף ג
גרף ב
גרף א

وبحسب البند (أ) ② ايضاً ان اذا n زوجي ان للدالة يوجد نقطة מקסימום ونقطة מינימום وبالتالي الرسم الملائم لـ $n=2$ هو رسم (ج) وبالتالي الرسم (أ) يلائم $n=3$

ج. $g(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ وهي عبارة عن $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ لـ $n=2$

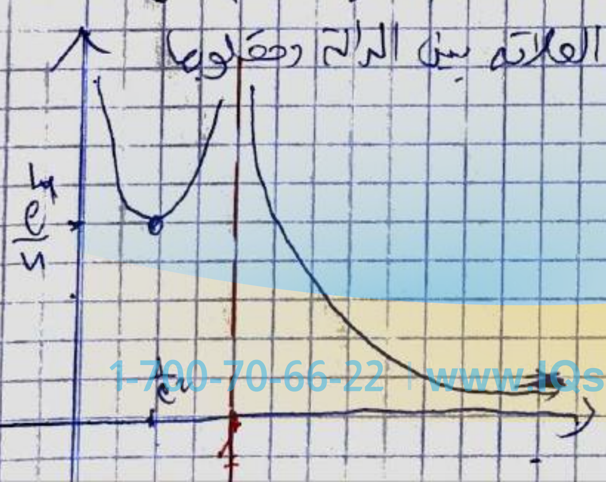
وبحسب البند (ب) الرسم الملائم لـ f هو ج وبالتالي رسم $g(x)$ سيحقق الشروط التالية (اعتماداً على العلاقة بين الدالة ومقلوبها)

$\left(\frac{1}{e^2},\frac{e^2}{4}\right)$ نقطة מינימום لـ $g(x)$

$x=1$ خط تقارب عمودي

$y=0$ خط تقارب افقي

$x\to+\infty$



الدالة $g(x)$ موجبة لكل x في مجال تعريفها، وبالتالي:-
المساحة المطلوبة عبارة عن

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\cdot(\ln(x))^2}\,dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(\ln(x))^2}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} T'(x)\cdot\frac{1}{T^2(x)}\,dx$$

بحيث $T(x)=\ln(x) \Rightarrow T'(x)=\frac{1}{x}$

اي ان التكامل من الصورة :-

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{T'(x)}{T^2(x)}\,dx = \left[\frac{-1}{T(x)}\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} = \left[\frac{-1}{\ln(x)}\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{-1}{\ln\frac{1}{e}} - \frac{-1}{\ln\frac{1}{e^2}} = \frac{-1}{\ln e^{-1}} - \frac{-1}{\ln e^{-2}}$$

$$= \frac{-1}{-1} - \frac{-1}{-2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$