حل نموذج بجروت

(806) 581

موعد شتاء 2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

من معطيات السؤال نفهم النقاط التالية:-

1. سرعة باسم اكبر بـ 20% من سرعة أمير
لذلك اذا فرضنا سرعة امير V اذا سرعة باسم $1.2V$

2. زمن سير باسم وامير متساوي - انطلقا بنفس اللحظة وسافرا بدون توقف حتى الالتقاء

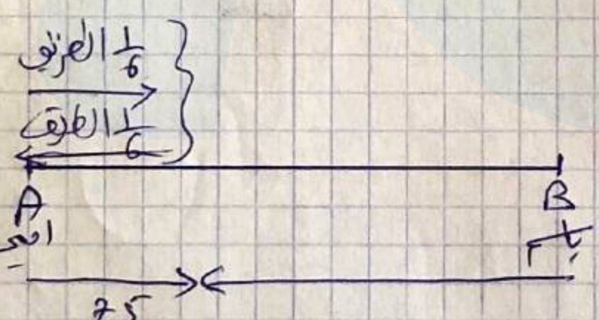
3. التقى باسم وامير على بعد 75 كم من المدينة A

* نعبر عن المسافة المقطوعة لكل منهما

نفرض ان المسافة بين المدينة A و B هي S:-
اذا المسافة التي قطعها باسم هي $S-75$
سرعة باسم هي $1.2V$ لذلك زمن باسم هو:-

$$\frac{S-75}{1.2V} = \text{زمن باسم}$$

بالنسبة لأمير:



امير قطع $\frac{1}{6}$ الطريق من A ثم عاد الى A وقطع نفس المسافة ثم عاد وانطلق

اذاً قطع مسافة $\frac{1}{6}S+\frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$

ثم انطلق من A باتجاه B والتقى بباسم على بعد 75 كم

وبالتالي المسافة الكلية التي قطعها هي $\frac{1}{3}S+75$

زمن أمير هو $\frac{\frac{1}{3}S+75}{V}$.

زمن السير متساوي للاثنين لذلك يتحقق:-

زمن أمير = زمن باسم

↓

$$\frac{S-75}{1.2V} = \frac{\frac{S}{3}+75}{V} \longrightarrow S-75 = 1.2\left(\frac{S}{3}+75\right)$$

$$\longrightarrow S-75 = 0.4S+90 \longrightarrow 0.6S = 165 \rightarrow \boxed{S=275}$$

إذا المسافة بين A و B هي 275 كم

ب.1. بحسب المعطيات السرعة التي يمكن السير بها تتراوح
بين 50 كم/س الى 110 كم/س.
امير وباسم انطلقا الساعة 8:00 صباحًا.
وحتى الالتقاء قطع باسم مسافة $S-75$ ← اي $275-75$ ← 200 كم
الزمن الذي يحتاجه باسم لقطع المسافة هو:

$$\frac{200}{1.2V}$$

ولكي يلتقيا الساعة 9:40 اي بعد $1\frac{2}{3}$ ساعة من انطلاقهم
يجب ان يتحقق:-

$$\frac{20}{1.2V} = 1\frac{2}{3}$$

نحل المعادلة ونفحص هل $1.2V$ ضمن مجال السرعات 50-110

$$\frac{200}{1.2V} = \frac{5}{3} \longrightarrow 600 = 6V \longrightarrow \boxed{100=V}$$

وسرعة باسم هي $1.2\cdot V$ ← 120 كم/س وهنا خارج المجال
اذًا غير ممكن

ب.2. بنفس الاسلوب، لكي يلتقيا الساعة 10 يجب ان يتحقق

$$\frac{200}{1.2V} = 2 \longrightarrow 200 = 2.4V \longrightarrow 83\frac{1}{3} = V$$

وعندها سرعة باسم $1.2V$ ضمن المجال لانه يتحقق ان

$$1.2V = 1.2\cdot\left(83\frac{1}{3}\right) = 100$$

وبهذه الحالة سرعة باسم ضمن مجال السرعات
وممكن ان يلتقيا الساعة 10:00.

حل سؤال 2

أ- بحسب المعطيات:

المتوالية a_n: حدها الاول موجب $a_1>0$ و $0<q<1$

ولذلك بما ان حدها الاول موجب وأساسها موجب اذاً كل حدودها موجبة.

المتوالية b_n: $b_1=a_6$ اي ان حدها الاول موجب وكذلك معطى ان المتوالية تصاعدية اي أن كل حدودها اكبر من b_1 وبالتالي كل حدودها موجبة.

المتوالية c_n: $c_n=\frac{a_{n+5}}{b_n}$ أي أنّ c_n كل حد فيها عبارة عن حاصل قسمة عددين موجبين أي كل حدودها موجبة.

ب بحسب المعطيات $c_n=\frac{a_{n+5}}{b_n}$ ويتحقق ان $b_1=a_6$

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+6}}{b_{n+1}} \Longrightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\frac{a_{n+6}}{b_{n+1}}}{\frac{a_{n+5}}{b_n}}=\frac{a_{n+6}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_n}{a_{n+5}}$$

$$\longrightarrow \frac{a_{n+6}}{a_{n+5}}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}=q\cdot\frac{1}{r}$$

اذاً: $\boxed{\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{q}{r}}$ اي ان حاصل قسمة اي حدين متتاليين في المتواليه c_n هو مقدار ثابت وبالتالي هندسية والحد الاول فيها هو $c_1=\frac{a_6}{b_1}=1$ (لأن $a_6=b_1$)

ج 1. نبرهن ان اساس c_n يحقق $0<q_c<1$ ←

بحسب النتيجة التي توصلنا لها فإن اساس c_n هو $q_c=\frac{q}{r}$

$0<q<1$ وبما ان b_n تصاعدية كل حدودها موجبة لذلك بالضرورة اساسها $r>1$ (لكل n يتحقق $\frac{b_{n+1}}{b_n}>1$)

من هنا $q_c=\frac{q}{r}$ فإن q_c عبارة عن حاصل قسمة عدد موجب اصغر من 1 على عدد موجب اكبر من 1 وبالتالي $0<q_c<1$.

2 ب حسب المعطيات $S_{c_n}=\frac{6}{5}$ ويتحقق $\frac{b_2}{a_8}=18$

$$\frac{b_2}{a_8}=\frac{b_1\cdot r}{a_6\cdot q^2}=\underbrace{\frac{b_1}{a_6}}_{1}\cdot\frac{r}{q^2}=18 \longrightarrow 1\cdot\frac{r}{q^2}=18$$

$$\longrightarrow \boxed{r=18q^2}$$

$$S_{c_n}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{1}{1-\frac{q}{r}}=\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{1}{\frac{r-q}{r}}=\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{r}{r-q}=\frac{6}{5}\Rightarrow\frac{18q^2}{18q^2-q}=\frac{6}{5}\Rightarrow 90q^2=108q^2-6q$$

$$\Rightarrow 18q^2-6q=0\Rightarrow 6q(3q-1)=0$$

$q=0$ غير ممكن $\quad \boxed{q=\frac{1}{3}}$

اذا $q=\frac{1}{3}$ وبالتالي $r=18\cdot q^2 \Rightarrow \boxed{r=2}$

اذا $\boxed{q=\frac{1}{3}}$ و $\boxed{r=2}$

حل سؤال 3

(1.أ) بحسب المعطيات :-

الاحتمال ان يكون في اسرة ابراهيم طفل شعره اجعد هو X

وبالتالي الاحتمال ان يكون شعره ليس اجعد هو 1-X

كذلك معطى أن الاحتمال ان تكون عينا الطفل بنيتان هو 2X

لذلك الاحتمال ان تكون عيناه ليست بنيتان هو 1-2X

نعرف :-

A - طفل في اسره ابراهيم شعره أجعد $\Leftarrow$ $P(A)=X$

$\bar{A}$ - طفل في اسره ابراهيم شعره ليس اجعد $\Leftarrow$ $P(\bar{A})=1-X$

B - طفل في اسرة ابراهيم عيناه بنيتان $\Leftarrow$ $P(B)=2X$

$\bar{B}$ - طفل في اسرة ابراهيم عيناه ليست بنيتان $\Leftarrow$ $P(\bar{B})=1-2X$

معطى ان:

$$P\left(\text{عيناه بنيتان} \,\middle|\, \text{شعره اجعد}\right) = \frac{P\left(\text{عيناه بنيتان} \,\middle|\, \text{شعر ليس اجعد}\right)}{1.5}$$

اي يتحقق:

$$P(B|A) = \frac{P(\bar{A}|B)}{1.5}$$

$$\Rightarrow 1.5\,P(B|A) = P(\bar{A}|B) \Rightarrow 1.5\,\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5\,P(A\cap B)}{X} = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{2X} \Rightarrow 3\,P(A\cap B) = P(\bar{A}\cap B)$$

نفرض أن $m = P(A\cap B)$ اذا $P(\bar{A}\cap B) = 3m$

نرتب المعطيات في جدول ونحسب m

	طفل عيناه ليس بنيتان $\bar{B}$	طفل عيناه بنيتان B	
X	$1-0.5X$ $\boxed{0.5X}$	m $\boxed{0.5X}$	طفل شعره اجعد (A)
$1-X$	$1-2X-0.5X$ $\boxed{1-2.5X}$	$3m$ $\boxed{1.5X}$	طفل شعره ليس اجعد $(\bar{A})$
1	$1-2X$	$2X$	

ويتحقق أن

$$m+3m=2X$$
$$4m=2X$$
$$\boxed{m=\tfrac{1}{2}X}$$

↓

نعوض في المربعات الملائمة

ومن الجدول نستنتج أن:

$$P(\text{طفل شعره اجعد وعيناه بنيتان}) = P(A\cap B) = 0.5X$$

(2.أ) مطلوب ايجاد: $P\left(\text{الطفل يزيد عيناه بنيتان} \mid \text{شعر يزيد أجعد}\right)$ أي:-

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.5X}{2X}=\boxed{0.25X}$$

(ب) $P\left(\text{شعره ليس اجعد} \cap \text{عيناه ليس بنيتان}\right) = P(\bar{A}\cap B)=\boxed{1-2X}$

من الجدول

(2.ب) $\boxed{X=0.2}$ ← عندها الاحتمالات في الجدول ستكون كالتالي

	$\bar{B}$	B	
0.2	0.1	0.5(0.2) 0.1	$\bar{A}$
0.8	0.5	0.3	$\bar{A}$
1	0.6	0.4	

الاحتمال ان يكون ل 3 اطفال على الاقل من بين الاربعة شعره اجعد وعيناه بنيتان هو:

ل 3 يتحقق الشرط $P_4(3) = \binom{4}{3}(0.1)^3\cdot(0.9)^1 = 0.0036$

\+ أو

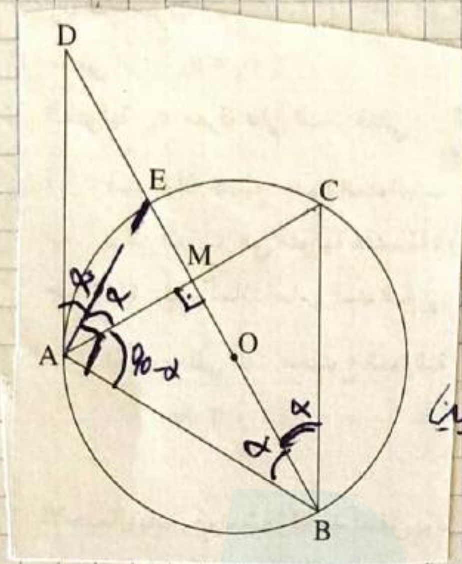
ل 4 يتحقق الشرط $P_4(4) = (0.1)^4 = 0.0001$

$\boxed{0.0037}$

حل سؤال 4

أ- برهان أن $AB=AC$

(1) $\measuredangle DAC=\measuredangle CBA$ الزاوية المحصورة بين مماس ووتر تساوي المحيطية المقابلة لنفس الوتر



(2) $\measuredangle DAC=\measuredangle ACB$ زوايا متبادلة بين متوازيين

من دمج (1) و (2) $\measuredangle CBA=\measuredangle ACB$

أي أن ΔABC متساوي الساقين.

وهو المطلوب (أ)

ب- بحسب المعطيات AE ينصف $\measuredangle MAD$

مطلوب أن نبرهن أن: $BM\perp AC$ أي أن $\measuredangle CMB=\measuredangle AMB=90^\circ$

نفرض $\measuredangle DAE=\alpha \Leftarrow \measuredangle EAM=\alpha$

(3) $\measuredangle EAB=90^\circ$ محيطية مقابلة للقطر EB.

(4) $\measuredangle AMB=90-\alpha$

(5) $\alpha=\measuredangle EBA=\measuredangle DAE$ زاوية محصورة بين مماس ووتر مساوية للمحيطية المقابلة لنفس الوتر

(6) في المثلث AMB مجموع زوايا المثلث 180 ولذلك يتحقق

$$\measuredangle AMB+(90-\alpha)+\alpha=180$$

$$\measuredangle AMB+90=180 \Rightarrow \boxed{\measuredangle AMB=90}$$

وهو المطلوب (ب).

جـ- مطلوب برهان أن $AE=R$ (R نصف قطر الدائرة)

(7) OM هو عمود متوسط للقطعة AC. المستقيم الذي يمر بمركز الدائرة ويعامد وتر ~~ينصفه~~

وبما أن وبالتالي BM عمودي على AC وينصفه

(8) في ΔABC BM عمود ومتوسط لذلك ΔABC متساوي الساقين $AB=BC$ وبما أن بحسب (أ) $AB=AC$ إذاً ABC متساوي الأضلاع

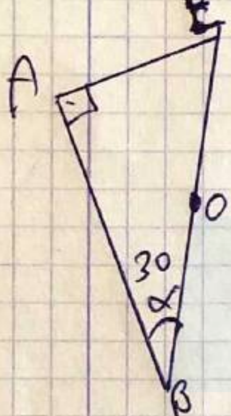
٩) في المثلث المتساوي الأضلاع ABC يتحقق $\measuredangle ABC = 2\alpha$

لأن BM هو ارتفاع ومتوسط وبالتالي هو منصف زاوية

أيضاً وبما أن $\measuredangle ABM = \alpha$ إذاً $\measuredangle MBC = \alpha$

ويتحقق $\measuredangle ABC = 2\alpha = 60 \Leftarrow \boxed{\alpha = 30^\circ}$

١٠) في المثلث القائم الزاوية ΔAEB ‏ $\measuredangle A = 90^\circ$ / $\measuredangle ABE = 30^\circ$



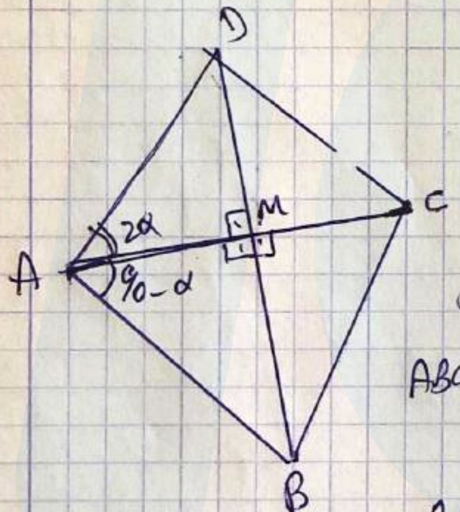
وبالتالي القائم المقابل للزاوية 30° مساوٍ لنصف الوتر.

القائم المقابل للزاوية 30° هو AE

الوتر BE هو القطر ويساوي $2R$

إذاً $AE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}\cdot 2R = R$

وهو المطلوب (أ).



٥. في المثلث ABD ، $BD \perp AM$

$\measuredangle MAD = 2\alpha = 60^\circ$ و $MAB = \overset{60}{90-\alpha}$

أي أن AM ارتفاع ومنصف زاوية

لذلك ABD متساوي الساقين

فيه $AD = AB$ إذاً الشكل الرباعي $ABCD$

هو شكل رباعي أقطاره متعامدة

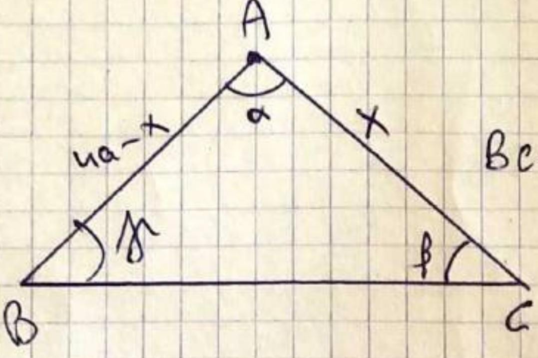
وتنصف بعضها $AM = MC$ و $BM = MB$

إذاً هو معين.

وهو المطلوب (د)

حل سؤال 5

أ.1 نرسم المثلث الموصوف بالسؤال $\alpha > 90^\circ$



بحسب المعطيات $AB+AC=4a$

لذلك اذا فرضنا $AB=x$ اذاً $BC=4a-x$

ويتحقق ان

$$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{4a-x}{x}=\frac{3}{5} \longrightarrow 20a-5x=3x$$

$$\longrightarrow 20a=8x \longrightarrow \frac{20a}{8}=x \longrightarrow \boxed{2.5a=x}$$

وبالتالي $AC=2.5a$ و $AB=1.5a$

بحسب معطيات السؤال $S_{\Delta ABC}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{16}a^2$

اي تتحقق: $S_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot AB}{2}\cdot\sin\alpha$

$$\frac{15\sqrt{3}}{16}\cdot a^2=\frac{2.5a\cdot 1.5a}{2}\cdot\sin\alpha$$

$$\longrightarrow 30\sqrt{3}\,\cancel{a^2}=6\cancel{a^2}\cdot\sin\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\alpha \longrightarrow \alpha=60 \text{ او } \alpha=120$$

X غير ملائم

اذاً: $\boxed{\angle BAC=\alpha=120^\circ}$

أ2) بحسب قانون ال cos:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$$

$$BC^2=(2.5a)^2+(1.5a)^2-2\cdot(1.5a)(2.5a)\cdot\cos 120$$

$$BC^2=6.25a^2+2.25a^2-7.5a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow BC^2=12.25a^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{BC=3.5a}$$

نحسب قانون ال sin

$$\frac{BC}{\sin 120} = \frac{AB}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{3.5a}{\sin 120} = \frac{1.5a}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{1.5a \cdot \sin 120}{3.5a} \Rightarrow \sin\beta = 0.3711$$

(β زاوية حادة) $\boxed{\Rightarrow \beta = 21.786}$

اذاً: $\gamma = 180-\alpha-\beta = 180-60-21.787$

$$\boxed{\gamma = 38.21}$$

ب. في الدائرة التي تحصر مثلث يتحقق $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$

اذاً: $\frac{3.5a}{\sin 120} = 2R \Leftarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{2R \cdot 0.866}{3.5}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2.02a}$$

نجد R من خلال مساحة المخمس.

في المخمس المحصور داخل دائرة يمكن تقسيمه الى 5 مثلثات مساحة كل واحد هي $\frac{1}{5}$ مساحة المخمس

والمثلثات متساوية الساقين رأسها في المركز

وبالتالي مساحة المثلث الواحد هي $\frac{100}{5} = 20$

من جهة اخرى مساحة المثلث هي:

(زاوية الرأس هي $\frac{360}{5} = 72$)

$$\frac{R \cdot R \cdot \sin 72}{2} = 20 \Rightarrow R^2 = \frac{40}{\sin 72}$$

$$\Rightarrow R^2 = 42.058 \Rightarrow \boxed{R = 6.485}$$

وبالتالي:

$R = 2.02a\ \cancel{\Rightarrow a = 2.02\,(6.485)}$

$$a = \frac{R}{2.02} \Rightarrow \boxed{a = \frac{6.485}{2.02} = 3.21}$$

حل سؤال 6

أ.1. تقاطع مع المحاور: $f(x) = 6x(x^3-1)^3$

مع x $(y=0)$

$$0 = 6x(x^3-1)^3$$

$6x = 0$ أو $(x^3-1)^3 = 0$

$\boxed{x=0}$ $\quad x^3-1=0 \longrightarrow x^3=1 \rightarrow \boxed{x=1}$

اذاً التقاطع مع x: $(0,0)$ $(1,0)$

وبما ان الدالة تمر بـ $(0,0)$ اذاً التقاطع مع y هو $(0,0)$

أ.2 النقاط القصوى:

$$f'(x) = 6\cdot(x^3-1)^3 + 6x\cdot 3(x^3-1)^2\cdot 3x^2$$

$$f'(x) = 6(x^3-1)^3 + 54(x^3-1)^2\cdot x^3$$

$$f'(x) = 6(x^3-1)^2\cdot[(x^3-1)+9x^3]$$

$$f'(x) = 6(x^3-1)^2\cdot[x^3-1+9x^3] = 6(x^3-1)^2[10x^3-1]$$

$$f'(x) = 6(x^3-1)^2[10x^3-1] = 0$$

$x^3-1=0$ أو $10x^3-1=0$

$x^3=1$ $\quad 10x^3=1$

$\boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$ $\quad x^3=\frac{1}{10}=0.1$

$\boxed{x=1}$ $\quad \boxed{x=\sqrt[3]{0.1}=0.464}$

تصنيف النقاط

x	$x=0$ $x<0.464$	0.464	$x=0.5$ $0.46<x<1$	1	$x=2$ $x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	التواء	$\nearrow$

$f'(0)=-$ // $f'(0.5)=+$ // $f'(2)=+$

$x=1$ التواء

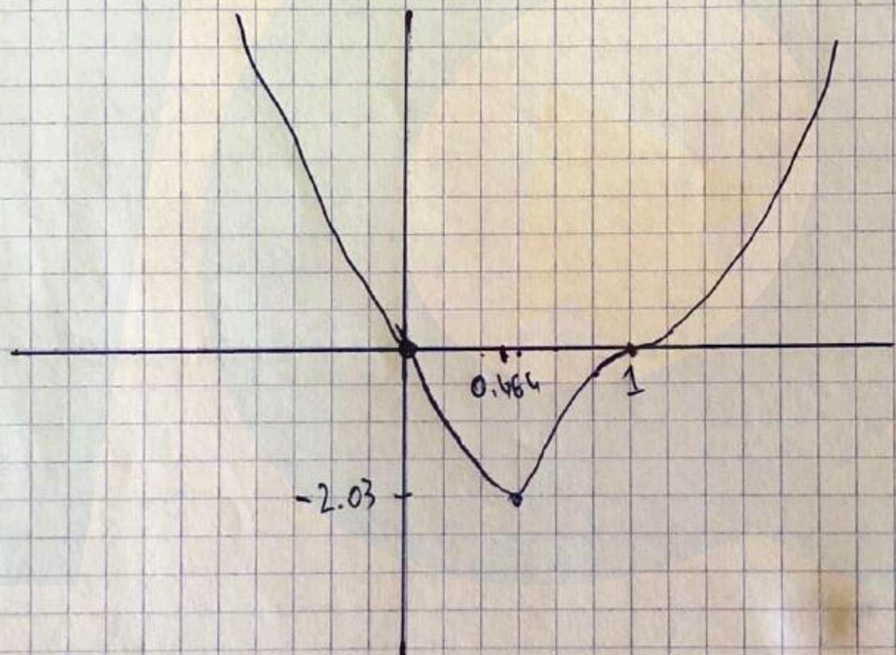
$f(1)=0$

$x=0.464$ min

$f(0.464)=6\cdot(0.464)(0.464^3-1)^3=-2.030$

$(0.464, -2.030)$ min

(3)



(4) المستقيم $y=k$ يكون مماساً للدالة في النقاط التي نرلها ميل الدالة
هو 0 اي في النقاط $\boxed{k=0}$ و $\boxed{k=-2.03}$

ب المعادلة هي $6x(x^3-1)=m$ أو يمكن كتابتها $f(x)=m$
وعمليًا السؤال يسأل عن مجال m بحيث المستقيم $y=m$
يقطع الدالة في نقطتين الشئ الاحداثي ~~x~~ لهما موجب

1. أو حل واحد موجب والآخر سالب: حوجب الر

حلان موجبان: $0 < m < -2.03$ // واحد موجب والآخر سالب $m>0$

ج. التكامل: $\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ هو تكامل محدود وفي حالة

كانت الدالة $f(x)$ موجبة فإنه يعبر عن مساحة

وفي حالة كانت الدالة سالبة فإنه يعبر عن مقدار

سالب الذي هو مضاد لمساحة الدالة.

بحسب الرسم نلاحظ ان الدالة سالبة في المجال $0 < x < 1$

~~[illegible]~~ ومن ثم تصبح الدالة موجبة وبالتالي قيمة التكامل

تكون اصغر ما يمكن في حالة $a=1$ لانها عندها ستعبر

عن اكبر مساحة للدالة لكن التعبير هو سالب (مضاد المساحة).

اذاً اصغر قيمة هي في $\boxed{a=1}$.

حل سؤال 7

معطى الدالة $f(x)=2\sin^2 x-1$ والمعرفة لكل x

في المجال $-\pi \le x \le \pi$ مطلوب :-

1.أ. ان نبرهن ان الدالة زوجية :-

اولاً: بحسب المتطابقة $-\cos 2x = 2\sin^2 x - 1$

نحصل على ان الدالة مطابقة للدالة

$$f(x) = -\cos 2x$$

ومن السهل نبحث هذه الدالة

$$f(-x) = -\cos(-2x) = -\cos(2x) = f(x)$$

لأن الدالة $\cos x$ زوجية

وبالتالي $f(x)$ دالة زوجية.

2.أ مع المحور x $y=0$

$$-\cos 2x = 0 \implies 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

$k=0 \longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$

$k=1 \longrightarrow x=\frac{3}{4}\pi$ $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

$k=-1 \longrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$

$k=-2 \longrightarrow x=-\frac{3\pi}{3}$ $\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$

مع المحور y $x=0 \longrightarrow f(0)=-\cos 2\cdot 0$

$$f(0) = -1$$

تقاطع مع y $(0,-1)$

$$f'(x) = -2\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi K \longrightarrow x = \frac{\pi K}{2}$$

$K=0 \to \boxed{x=0}$ // $K=-1 \to \boxed{x=-\frac{\pi}{2}}$ // $\cancel{K}=-2 \to \boxed{x=-\frac{\pi}{2}}$

$K=1 \to \boxed{x=\frac{\pi}{2}}$ // $\cancel{K}=2 \to \boxed{x=\pi}$

اذاً في المجال المعطى للدالة $f(x)$ هنالك 5 نقاط

مشتبهة يجب تصنيفها ، نصنفها بواسطة جدول

x	$-\pi$	$\overset{-\frac{2}{3}\pi}{\longleftrightarrow}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\overset{-\frac{\pi}{4}}{\longleftrightarrow}$	0	$\overset{\frac{\pi}{4}}{\longleftrightarrow}$	$\frac{\pi}{2}$	$\overset{\frac{2}{3}\pi}{\longleftrightarrow}$	π
f'	0	+	0	−	0	+	0	−	0
f		↗		↘		↗		↘	
	ق.ح طرف		max		min		max		ق.ح طرف

$f(-\frac{2}{3}\pi) = +$ // $f(-\frac{\pi}{4}) = -$ // $f(\frac{\pi}{4}) = +$ // $f(\frac{2}{3}\pi) = -$

نعوض بالدالة ونجد احداثيات النقاط القصوى ويمكننا

استغلال الحقيقة ان الدالة زوجية وذلك $f(-\pi) = f(\pi)$

$f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$

ونحصل على:

$\underset{\text{ق.ح}}{\overset{\min}{}}(-\pi,-1)$ // $\underset{\max}{(-\frac{\pi}{2},1)}$ // $\underset{\min}{(0,-1)}$ // $\underset{\max}{(-\frac{\pi}{2},1)}$ // $\underset{\text{min ق.ح}}{(\pi,-1)}$

1. ب

$$g(x) = \frac{\cos 2x \cdot (1-\sin x)}{(\sin x - 1)}$$

مجال تعريف الدالة هو $\sin x - 1 \neq 0 \leftarrow \sin x \neq 1$

$x \neq \frac{\pi}{2}$

وبالتالي مجال تعريف الدالة هو:

$-\pi \leq x < \frac{\pi}{2}$ او $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

ب. 2 في المجال $\pi \leq x < \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi-$

نلاحظ انه اذا اختزلنا $\frac{(1-\sin x)}{\sin x - 1} = -1$

ستصبح الدالة $g(x)$:

$$g(x) = \frac{\cos 2x \cdot \overset{-1}{\cancel{(1-\sin x)}}}{\cancel{\sin x - 1}} = -\cos 2x$$

أي $g(x) = -\cos 2x$

وعندها في المجال $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ أو $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

يتحقق $f(x) = g(x)$.

3. لا يوجد خط تقارب عمودي للدالة $g(x)$ في $x = \frac{\pi}{2}$

لاننا اختزلنا $\frac{1-\sin x}{\sin x - 1}$ بالدالة في جوار $x = \frac{\pi}{2}$

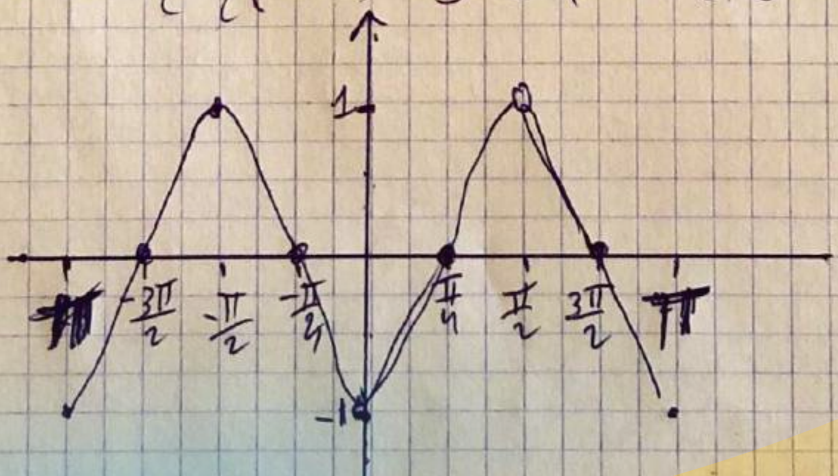
سيكون ثقب وقيمة الدالة $g(x)$ ستقترب من

$g(\frac{\pi}{2}) = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos \pi = -1$

أي ان النقطة $(\frac{\pi}{2}, -1)$ هي ثقب

ب. 4 لرسم الدالة $g(x)$ نستغل نتائج الدالة $f(x)$

نحصل على النقاط القصوى, والتقاطع مع المحاور



ه. $h(x) = -f(x) + b$ (برامتر b)

$$h(x) = \cos 2x + b$$

$$\int_{-\pi}^{0} (\cos 2x + b)\, dx = \frac{3\pi}{2}$$

$$\left[\frac{\sin 2x}{2} + bx\right]_{-\pi}^{0} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\left(\frac{\sin 2\cdot 0}{2} + b\cdot 0\right) - \left(\frac{\overbrace{\sin 2(-\pi)}^{0}}{2} + b(-\pi)\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$0 + b\pi = \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

حل سؤال 8

بما أن النقطة A تقع على الدالة $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$

إذاً إحداثيات النقطة A هي من الصورة $\left(x_A, \frac{4}{\sqrt{x_A}}\right)$

بعد النقطة A عن أصل المحاور هو

$$g(x_A)=\sqrt{(x_A-0)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{x_A}}-0\right)^2}=\sqrt{(x_A)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{x_A}}\right)^2}$$

$$g(x_A)=\sqrt{x_A^2+\frac{16}{x_A}}$$

نجد النقاط القصوى للدالة البعد $g(x_A)$ ومن ثم نحدد النقطة اللازمة وهي التي تعبر عن أقصر بعد.

بما أن الدالة $g(x_A)$ موجبة لأنها تعبر عن بعد لذلك النقاط القصوى لها هي نفس النقاط القصوى للدالة $g^2(x_A)$ (نفس الاحداثي x للنقاط القصوى)
ولذلك لتسهيل الحل سنجد النقاط القصوى لـ $g^2(x_A)$

$$K(x_A)=g^2(x_A)=x_A^2+\frac{16}{x_A} \Rightarrow K(x_A)=x_A^2+\frac{16}{x_A}$$

$$K'(x_A)=2x_A-\frac{16}{x_A^2}=0 \longrightarrow 2x_A=\frac{16}{x_A^2} \Rightarrow 2x_A^3=16$$

$$\longrightarrow x_A^3=8 \longrightarrow x_A=\sqrt[3]{8} \longrightarrow \boxed{x_A=8}$$

إذاً نقطة الشذوذ للدالة $K(x_A)$ والدالة $g^2(x_A)$ هي نفس $\boxed{x_A=2}$

لتحديد نوع النقطة نفحص جدول

x_A	1	2	3
K'	$-$	0	$+$
K	$\searrow$	min	$\nearrow$

$K'(1)=2\cdot 1-\frac{16}{1^2}=-14<0$

$K'(3)=2\cdot 3-\frac{16}{3^2}=+>0$

نجد الإحداثي y للنقطة A

النقطة A من الصورة $\left(x_A, \frac{4}{\sqrt{x_A}}\right)$ أي $\left(2, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$

هي النقطة التي لها أقصر بعد بين الدالة و نقطة الأصل

2.أ $A\left(2,\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ $O:(0,0)$

ميل المستقيم OA هو $\frac{\frac{4}{\sqrt{2}}-0}{2-0} \leftarrow \frac{4}{2\sqrt{2}} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ميل المماس للدالة f في النقطة A هو $f'(2)$

$$f'(x)=\frac{0\cdot\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cdot 4}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-2}{x\sqrt{x}}$$

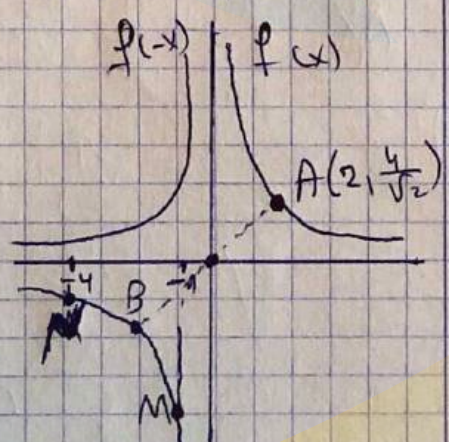
$$f'(x)=\frac{-2}{x\sqrt{x}} \longrightarrow f'(2)=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

وحاصل ضرب ميلي المستقيمين هو $\sqrt{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$

ولذلك متعامدين.

ب.1 $g(x)=-f(-x)$ وبالتالي $g(x)=\frac{-4}{\sqrt{-x}}$

نرسم الدالة $f(x)$ و $f(-x)$ ومن ثم $-f(-x)$ في نفس هيئة المحاور.



الدالة $g(x)$ هي شبه (انعكاس) للدالة $f(x)$ أي أنها متماثلة بالنسبة للنقطة $(0,0)$ وبالتالي المصادر المضادة تبعد نفس البعد أي أن النقطة التي فيها $x=-2$ وتقع على g تبعد أقصر بعد عن $(0,0)$ والنقطة هي $B\left(-2,\frac{-4}{\sqrt{-2}}\right)$

ب.2 في المجال $-4\le x\le -1$ وبما أن $x=-2$ هو مينيموم للدالة لذلك أكبر بعد في المجال سيكون بالأطراف x=-4 أو x=-1.

نفحص البعد بواسطة الدالة ونحصل على النقطة $M(-4,-2)$