حل نموذج بجروت

481 (804)

موعد شتاء مُتأخر

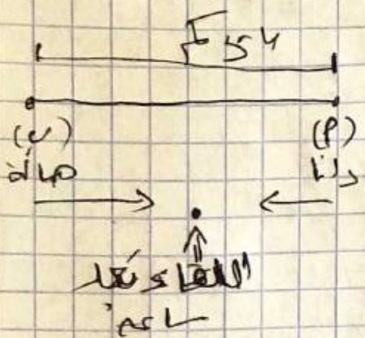
2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الأول

أ ـــ 54 كم ـــ ب



		سرعة	زمن	مسافة
حتى الالتقاء	دانا	V_1	1	$\boxed{V_1}$
	حالة	V_2	1	$\boxed{V_2}$
الوصول للمدينة الأخرى	دانا	V_1	$\boxed{\frac{V_2}{V_1}}$	V_2
	حالة	V_2	$\boxed{\frac{V_1}{V_2}}$	V_1

زمن حالة   زمن يتحرك دانا

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_2}{V_1} +$ زمن وقوف دانا (II)

$V_1 + V_2 = 54$ (I)

$$\boxed{V_1 = 54 - V_2}$$

$$\cancel{V_1 \cdot V_2} \ \frac{V_2}{V_1} + 1.5 = \frac{V_1}{V_2} \ / V_1 \cdot V_2$$

$$\boxed{V_2^2 + 1.5 V_1 V_2 = V_1^2}$$

نعوض $V_1 = 54 - V_2$ في المعادلة الثانية.

$$V_2^2 + 1.5 \cdot V_2 (54 - V_2) = (54 - V_2)^2$$

$$\cancel{V_2^2} + 81V_2 - 1.5V_2^2 = 2916 - 108V_2 + \cancel{V_2^2}$$

$$/:1.5 \quad 0 = 1.5V_2^2 - 189V_2 + 2916$$

$$0 = V_2^2 - 126V_2 + 1944$$

$$\frac{126 \pm \sqrt{15876 - 4 \cdot 1944}}{2} = \frac{126 \pm \sqrt{8100}}{2} =$$

$$\frac{126 \pm 90}{2} \quad \boxed{108} \quad \boxed{18}$$

نفحص الإجابة الصحيحة :

$$V_1 = 54 - V_2$$

(I)
$$V_1 = 54 - 18$$
$$\boxed{V_1 = 36}$$

(II)
$$V_1 = 54 - 108$$
$$\boxed{\cancel{V_1 = -54}}$$

ملغي لأن V_1 مقدار موجب.
(يعبر عن سرعة)

من هنا:

سرعة سفر دانا : $36\frac{km}{h}$
سرعة سفر هالة : $18\frac{km}{h}$

(ب) المسافة التي قطعتها دانا من لحظة اللقاء وحتى وصلت المدينة ب: $V_2 = 18$ كم
المسافة التي قطعتها هالة من لحظة اللقاء وحتى وصلت المدينة P : $V_1 = 36$ كم
حسب الجدول في البند السابق.

النسبة بين المسافات :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{18}{36} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

السؤال الثاني

$A(1,8)$

$M(3,5)$

(أ) نجد نصف قطر الدائرة : وهو البعد بين A و M .

$$R=\sqrt{(5-8)^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}$$

$$\boxed{R=\sqrt{13}}$$

من هنا معادلة الدائرة : $(X-X_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$

$$\boxed{(X-3)^2+(y-5)^2=13}$$

(ب) ميل المماس • ميل نصف القطر AM = -1

وذلك لان AM يعامد المماس بالنقطة A حسب نظرية المماس معامد لنصف القطر في نقطة التماس.

نجد ميل AM :

$$m_{AM}=\frac{8-5}{1-3}=\boxed{\frac{3}{-2}}$$

$$m_{AM}\cdot \text{ميل المماس}=-1$$

$$\frac{3}{-2}\cdot a=-1$$

$$\boxed{a=\frac{2}{3}}$$

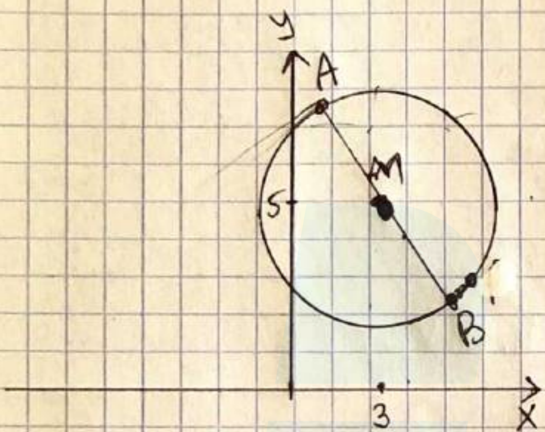
$$\boxed{y_{\text{المماس}}=\frac{2}{3}X+n}$$

نعوض النقطة $A(1,8)$ ونجد معادلة المماس:

$$8 = \frac{2}{3}\cdot 1 + n$$

$$n = 7\frac{1}{3}$$

من هنا معادلة المماس: $\boxed{y = \frac{2}{3}x + 7\frac{1}{3}}$



ج) $y_B = 2$, $x_B > 3$

① نعوض في معادلة الدائرة $y_B = 2$ ونجد x_B.

$$(x-3)^2 + (\overbrace{\underbrace{2-5}_{-3})^2}^{9} = 13$$

$$x^2 - 6x + 9 + 9 - 13 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-5)(x-1) = 0$$

$\boxed{x_1 = 5}$ $\boxed{x_2 = 1}$

وبما ان $x_B > 3$ اذاً

$$x_B = 5$$

$\Leftarrow \boxed{B(5,2)}$

② قطر الدائرة طوله $2\sqrt{13}$.

اذا تحقق ان $|AB| = 2\sqrt{13}$ اذاً هو قطر في الدائرة:

$$|AB| = \sqrt{(2-8)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

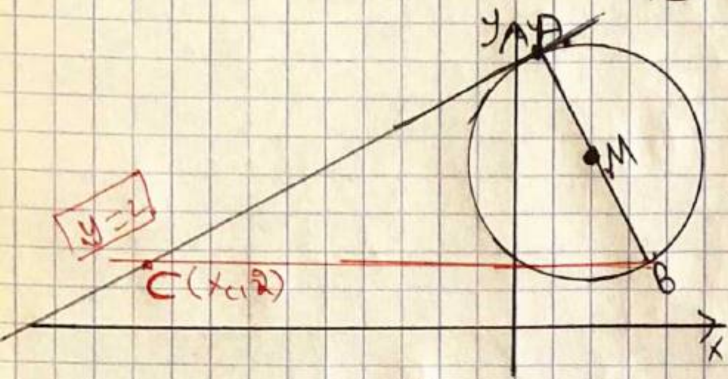
$$|AB| = \sqrt{4\cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

اذاً نعم $\overline{AB}$ هو قطر في الدائرة.

(د) معادلة المستقيم $y=y_B \Leftarrow \underline{\underline{y=2}}$. (المستقيم يوازي المحور X)

احداثي y للنقطة C هو 2 لأنه تقاطع المماس مع المستقيم $y=2$.

نعوض $y=2$ في معادلة المماس ونجد احداثي X للنقطة C :



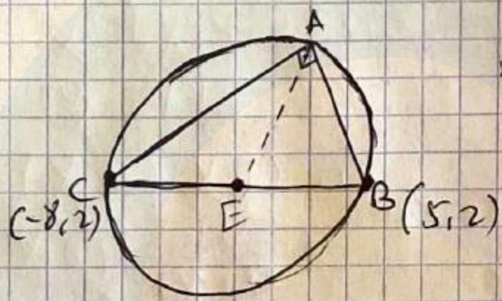
$$y=\frac{2}{3}x+7\frac{1}{3}$$

$$\cancel{3}/\,2=\frac{2}{3}x+7\frac{1}{3}$$

$$6=2x+22$$

$$-16=2x$$

$$\boxed{C(-8,2)} \Leftarrow \boxed{x=-8}$$



$\underline{\Delta CAB}$:

النقطة E هي مركز الدائرة التي تحصر ΔACB .

وحسب نظرية: الزاوية المحيطية المقابلة لقطر الدائرة تساوي $90°$:

اذاً CB هو قطر الدائرة لأن $\measuredangle CAB=90°$. (زاوية بين مماس وقطر)

من هنا E هي منتصف CB .

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-8+5}{2}=-1.5$$

$$y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{2+2}{2}=2$$

$$\Rightarrow \boxed{E(-1.5,2)}$$

AE هو متوسط في $\triangle ACB$.

المتوسط يقسم المثلث لقسمين (مثلثين) متساويا المساحة.

بالتالي :

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ACB}$$

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{1}{4} \cdot |AB| \cdot |AC|$$

نجد طول AB و AC :

$|AB| = 2\sqrt{13}$; وجدناه سابقا

$$|AC| = \sqrt{(-8-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{117} = \boxed{19.5}$$

وحدات مساحة

السؤال الثالث

احتمال النجاح : p .

احتمال ان لا ينجح : $4p$

(أ) $4p+p=1$

$5p=1$

$$\boxed{p=\frac{1}{5}}$$

الاحتمال بان ينجح

(ب) ① الاحتمال بانه تقدم لامتحانين على الأكثر هو :

الاحتمال أنه تقدم لامتحان واحد ونجح + الاحتمال انه تقدم للامتحان الاول ولم ينجح ثم تقدم للثاني ونجح .

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = 0.2 + 0.16 = \boxed{0.36}$$

②
$$P\left(\frac{\text{نجح في الامتحان}}{\text{اخذ فرصة في المرة الثانية}}\right) = \frac{P\left(\text{تقدم للامتحان الثاني} \cap \text{على الأكثر لامتحانين}\right)}{P\left(\text{على الأكثر تقدم لامتحانين}\right)} =$$

$$\frac{\overset{\text{(تقدم للامتحان الثاني)}}{0.8\cdot 0.2}}{\underset{\text{(من البند السابق)}}{0.36}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

السؤال الرابع

$AB \parallel EO$

(أ) $\sphericalangle OEA$ هي قائمة وذلك حسب نظرية نصف القطر معامد للمماس بنقطة التماس اذاً E زاوية قائمة.

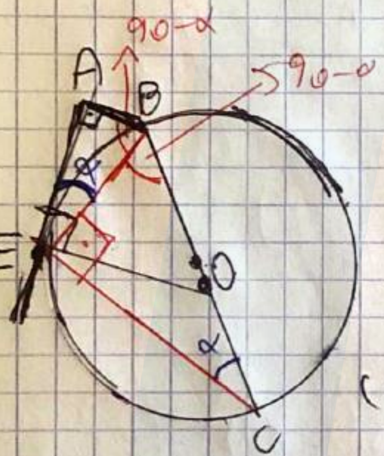
وبما ان $AB \parallel EO$ من هنا وحسب الزوايا المتكاملة:

$$\overbrace{\sphericalangle OEA}^{90^\circ} + \sphericalangle EAB = 180^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle EAB = 90^\circ}$$

(ب) $\sphericalangle CEB = 90^\circ$ وذلك حسب نظرية: الزاوية المحيطية المقابلة للقطر تساوي 90°.

وحسب نظرية الزاوية المحصورة بين مماس ووتر مساوية للزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الاخرى اذاً:



$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle ECB = \alpha$$

ومن هنا: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = (90-\alpha)$

الزاوية الثالثة للمثلث والمكملة لل180.

اي: $\triangle EAB \sim \triangle CEB$ حسب ز ز ز:

(1) $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BAE = 90^\circ$

(2) $\sphericalangle ECB = \sphericalangle AEB$

(3) $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABE$

(ج) من التشابه في البند السابق:

$$\frac{EA}{CE} = \frac{AB}{EB} = \frac{EB}{CB}$$

$$\boxed{AB \cdot CB = EB^2}$$

د) $3 = \frac{CB}{EB}$. ، $OB = OC$ انصاف اقطار ولذلك :

OE هو متوسط في المثلث $\triangle CEB$. والمتوسط يقسم المثلث لمثلثين متساويا المساحة.

من هنا: $S_{\triangle EBO} = \frac{1}{2} \cdot S_{\triangle EBC}$

وبما أن : $\triangle ABE \sim \triangle EBC$

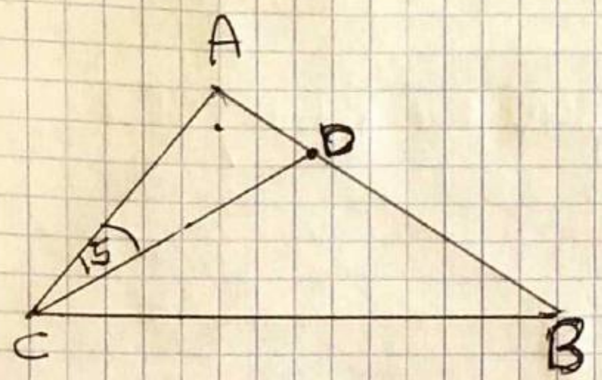
اذا النسبة بين المساحات هي تربيع النسبة بين الاضلاع

من هنا:

$$\frac{S_{\triangle EBO}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{\triangle CEB}}{S_{\triangle EAB}}\right) = \frac{1}{2} \cdot (3)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9$$

$$\boxed{\frac{S_{\triangle EBO}}{S_{\triangle EAB}} = 4.5}$$

السؤال الخامس



$AD = \frac{1}{3}AC$

$\measuredangle ACD = 15^\circ$

$0^\circ < \measuredangle ADC < 90^\circ$

(أ) ← حسب قانون sin الموسّع :

في ΔADC :

$$\frac{AD}{\sin(\measuredangle ACD)} = \frac{AC}{\sin(\measuredangle ADC)}$$

$$\sin(\measuredangle ADC) \cdot AD = AC \cdot \sin(\measuredangle ACD)$$

$$\sin(\measuredangle CDA) = \frac{AC}{AD} \cdot \sin(\overset{15^\circ}{\measuredangle ACD})$$

$\cancel{AD} = \frac{1}{3}AC$

$\boxed{3 = \frac{AC}{AD}} \Longrightarrow \sin(\measuredangle CDA) = 3 \cdot \sin(15)$

$$\boxed{\measuredangle CDA = 50.94^\circ}$$

(ب) $CD = DB$

$S_{\Delta CDB} = 40^\circ$

$\measuredangle CDB = 180^\circ - \measuredangle ADC = 180^\circ - 50.94^\circ$

$$\boxed{\measuredangle CDB = 129.06^\circ}$$

$$S_{\Delta CDB} = \frac{CD \cdot DB \cdot \sin(\measuredangle CDB)}{2}$$

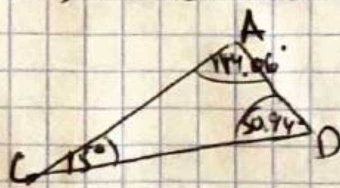
$$\frac{(CD)^2 \cdot \sin(129.06)}{2} = 40$$

$CD^2 = 103.028$

$\underline{CD = DB = 10.15}$ وحدات طول

ننظر للمثلث ACD :

$$\measuredangle A = 180^\circ - 15^\circ - 50.94^\circ = 114.06^\circ$$



$$\frac{AD}{\sin(\measuredangle C)} = \frac{CD}{\sin(\measuredangle A)}$$

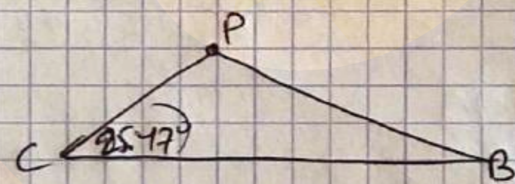
$$AD = \frac{10.15 \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(114.06^\circ)}$$

$\boxed{AD = 2.877}$ وحدات طول

(b) $CP = \frac{1}{2} CD$

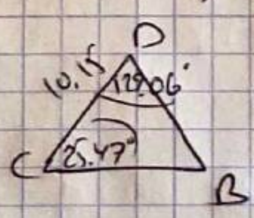
$CP = 5.075$ وحدات طول.

: ΔCPB



نجد $\measuredangle C$:

$$\measuredangle DCB = \measuredangle DBC = \frac{180^\circ - 129.06}{2} = 25.47^\circ$$



نجد طول CB : من ΔCDB :

$$\frac{DB}{\sin(25.47^\circ)} = \frac{CB}{\sin(129.06^\circ)}$$

$$\frac{10.15 \cdot \sin(129.06^\circ)}{\sin(25.47^\circ)} = CB$$

$\boxed{CB = 18.33}$ وحدات طول

حسب قانون cos الموسّع في ΔPCB :

$$(PB)^2 = CP^2 + CB^2 - 2 \cdot CP \cdot CB \cdot \cos(25.47^\circ)$$

$$PB^2 = 25.7556 + 335.9889 - 167.97$$

$$PB^2 = 193.776$$

$$\boxed{PB = 13.91 \text{ وحدات طول}}$$

السؤال السادس

$$f(x)=\frac{bx^2}{x^2-4x+3}$$

(أ) ① $x^2-4x+3\neq 0$

$(x-3)(x-1)\neq 0$

$\boxed{x\neq 3}$ $\boxed{x\neq 1}$ مجال تعريف الدالة.

② $y=2$ خط تقارب افقي.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{bx^2}{x^2-4x+3}=\frac{b}{1}=2$$

$\Leftarrow \boxed{b=2}$

(ب) $\boxed{f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4x+3}}$

① $f(1)=\frac{2\cdot 1}{1-4+3}=\frac{2}{0} \Rightarrow$ خط تقارب عامودي

$f(3)=\frac{2\cdot 9}{9-12+3}=\frac{18}{0} \Rightarrow$ خط تقارب عامودي.

خطوط تقارب عامودية $\boxed{x=1}$ و $\boxed{x=3}$

② تقاطع مع محور y : $(x=0)$:

$$f(0)=\frac{0}{0-0+3}=\underline{0}$$

$\boxed{(0,0)}$

$$f'(x)=\frac{4x(x^2-4x+3)-(2x-4)2x^2}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{4x^3}-16x^2+12x\cancel{-4x^3}+8x^2}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-8x^2+12x}{(x^2-4x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$: المقام $\neq 0$ اذا نساوي البسط للصفر:

$$-8x^2+12x=0$$

$$-4x(2x-3)=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$2x-3=0$$

$$2x=3$$

$$\boxed{x=1.5}$$

$f(0)=0$ $\qquad f(1.5)=\frac{2(1.5)^2}{(1.5)^2-4\cdot1.5+3}=\frac{4.5}{-0.75}=-6$

	$x<0$ (-1)	$x=0$	$0<x<1$ (0.5)	$x=1$	$1<x<1.5$ (1.4)	$x=1.5$	$1.5<x<3$ (2)	$x=3$	$x>3$ (4)
$f'(x)$	$-$	0	$+$	//	$+$	0	$-$	//	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	//	↗	max	↘	//	↘

$f'(-1)=\frac{-8(1)+(-12)}{+}=-$

$f'(0.5)=\frac{-8(0.5)^2+6}{+}=+$

$f'(1.4)=\frac{(1.4)^2(-8)+12(1.4)}{+}=+$

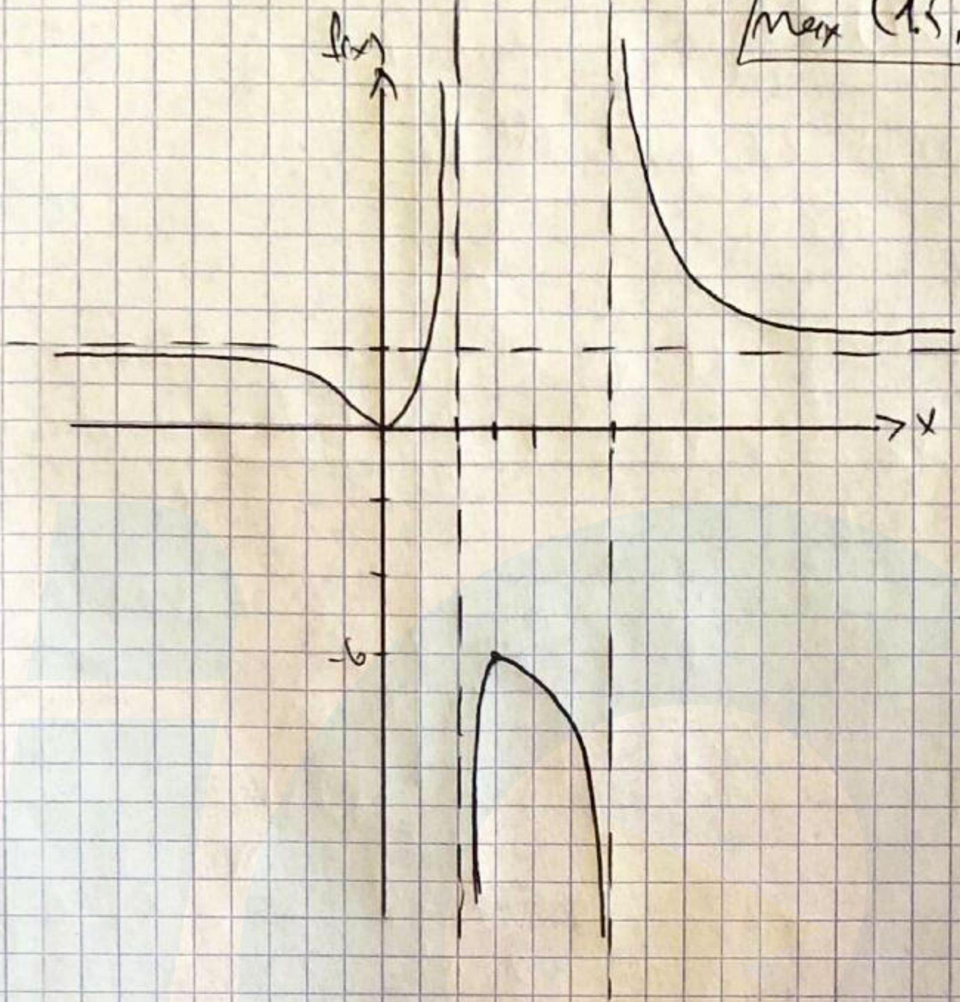
$f'(2)=\frac{-8\cdot4+12\cdot2}{2}=-$

$f'(4)=\frac{-8\cdot16+12\cdot4}{+}=-$

$\boxed{\text{min } (0,0)}$

$\boxed{\text{Max } (1.5, -6)}$

(4)



السؤال السابع

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

$$X_B = -t \quad , \quad X_A = t$$

(أ) $$f(t) = \frac{6}{t} \quad , \quad f(-t) = \frac{6}{-t}$$

$$A\left(t, \frac{6}{t}\right) \qquad B\left(-t, -\frac{6}{t}\right)$$

$$AB^2 = \left(\sqrt{(t-(-t))^2 + \left(\frac{6}{t} - \left(-\frac{6}{t}\right)\right)^2}\right)^2$$

$$AB^2 = (2t)^2 + \left(\frac{12}{t}\right)^2$$

$$\boxed{AB^2 = 4t^2 + \frac{144}{t^2}}$$

ب) ① الدالة $g(t)$ هي:

$$g(t) = 4t^2 + \frac{144}{t^2}$$

نجد نقطة ال min لهذه الدالة:

$$g'(t) = 8t + \frac{144(-2)}{t^3} = \boxed{8t - \frac{288}{t^3}}$$

$$g'(t) = 0$$

$$t^3 / \; 8t - \frac{288}{t^3} = 0$$

$$8 / \; 8t^4 - 288 = 0$$

$$t^4 = 36$$

$$t_1 = \sqrt{6} \quad , \quad t_2 = -\sqrt{6}$$

وبما ان $X_A > 0$ اذا $t > 0$

اذا $\boxed{t = \sqrt{6}}$

نحسب المشتقة الثانية نتأكد ان كان $t=\sqrt{6}$ هو نقطة نهاية صغرى (احداثي لهذه النقطة).

$$g'(t)=8t-\frac{288}{t^3}$$

$$g''(t)=8-\frac{288\cdot(-3)}{t^4}=8+\frac{864}{t^4}$$

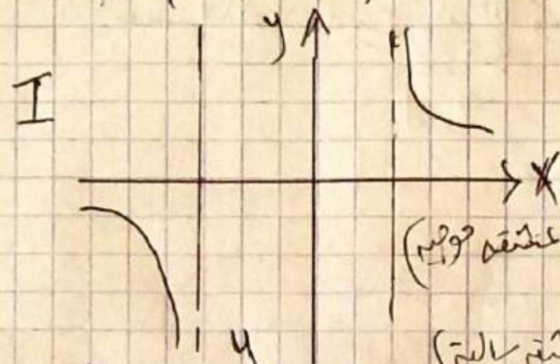
$$g''(\sqrt{6})=8+\frac{864}{36}=30>0$$

اي $t=\sqrt{6}$ هو القيمة ل t التي بالنسبة لها AB^2 اصغر ما يمكن.

② بما ان $g(t)=AB^2$ ووجدنا أنه عندما $t=\sqrt{6}$ يكون ل AB^2 اصغر مقدار ممكن، بالتالي ل $\sqrt{g(t)}$ اي ل AB اصغر طول ممكن سيتحقق لنفس احداثي t اي $\boxed{t=\sqrt{6}}$.

السؤال الثامن :

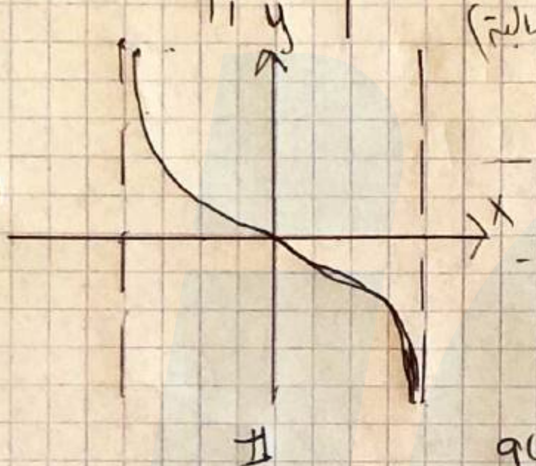
(أ) بحسب العلاقة بين الدالة والمشتقة : مجالات تصاعد الدالة هم المجالات الموجبة للمشتقة , ومجالات تنازل الدالة هم المجالات السالبة للمشتقة.



بالنسبة للرسم I :

المجالات التصاعدية للدالة : $x>2$ (المشتقة موجبة)

المجالات التنازلية للدالة : $x<-2$ (المشتقة سالبة)



بالنسبة للرسم II :

المجالات التصاعدية للدالة : $-2<x<0$

المجالات التنازلية للدالة : $0<x<2$

(ب) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x^2-4}$

① مجال تعريف $f(x)$:

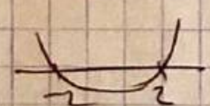
$4-x^2\geq 0$

$4\geq x^2$

نجد نقاط الصفر :

$x^2-4=0$

$\boxed{x=\pm 2}$



من هنا مجال تعريف الدالة :

$f(x)$: $\boxed{-2\leq x\leq 2}$

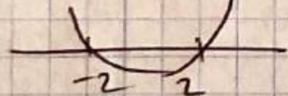
مجال تعريف $g(x)$:

$x^2-4\geq 0 \Leftarrow x^2\geq 4$

نجد نقاط الصفر :

$x^2=4$

$x=\pm 2$



من هنا, مجال تعريف الدالة :

$g(x)$: $\boxed{x\geq 2}$ أو $\boxed{x\leq -2}$

② من مجال التعريف:

مجال تعريف الرسم I هو $x>2$ أو $x<-2$

اذاً هو ملائم لمشتقة الدالة $g(x)$

ومجال تعريف الرسم II هو $-2<x<2$

اذاً هو ملائم لمشتقة الدالة $f(x)$.

أي:

$I \Leftarrow g'(x)$

$II \Leftarrow f'(x)$

(ج) ① تقاطع $f(x)$ مع محور x:

$0=\sqrt{4-x^2}$

$0=4-x^2$

$x^2=4$

$\boxed{x=\pm 2} \Rightarrow \boxed{(2,0)}$ $\boxed{(-2,0)}$

تقاطع $f(x)$ مع محور y:

$f(0)=\sqrt{4-0}$

$f(0)=\sqrt{4}$

$f(0)=2$

$\boxed{(0,2)}$

تقاطع $g(x)$ مع محور x:

$0=\sqrt{x^2-4}$

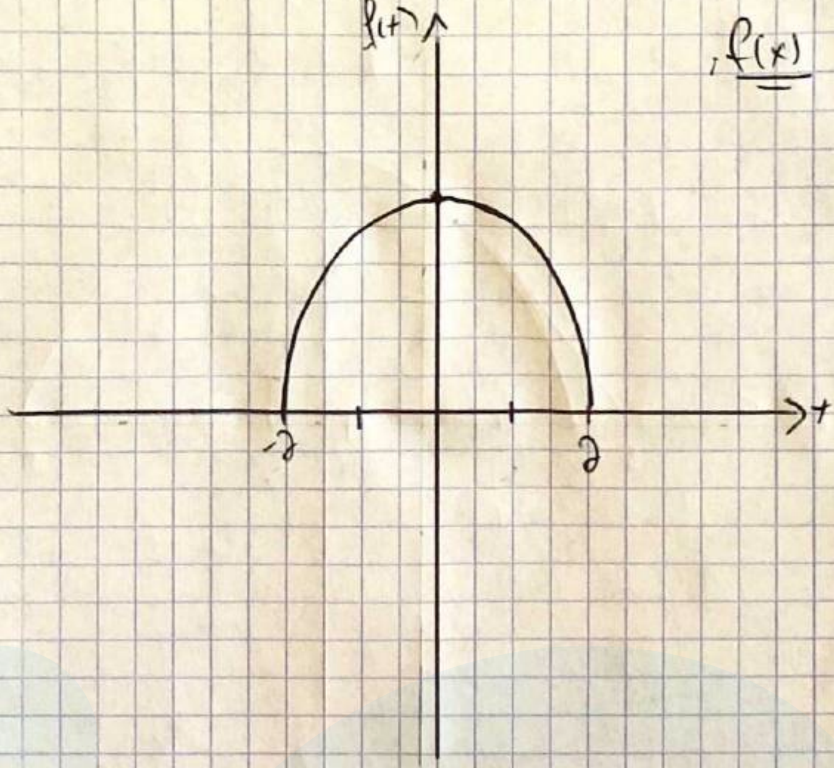
$x^2=4$

$\boxed{x=\pm 2} \Rightarrow \boxed{(2,0)}$ $\boxed{(-2,0)}$

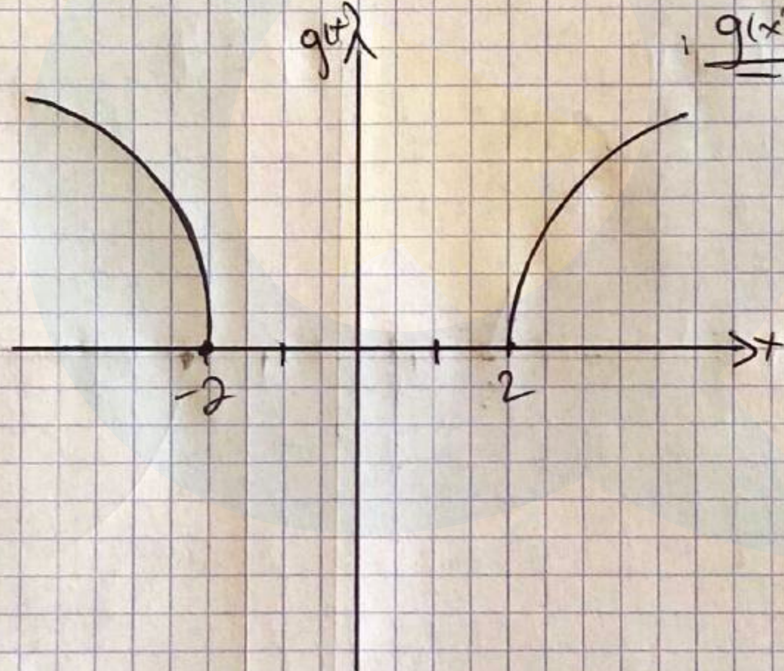
تقاطع $g(x)$ مع محور y:

$g(0)=\sqrt{0-4}=\emptyset$

لا يوجد تقاطع للدالة $g(x)$ مع محور y.



$f(x)$ (2)



$g(x)$