حل نموذج بجروت

382 (803)

موعد شتاء 2021

طاقم الرياضيات

معهد IQ

السؤال الأول

أ) بحسب المعطيات ثمن x قمصان بيضاء هو 840 شيكل

اذا ثمن القميص الابيض الواحد = $\frac{\text{ثمن القمصان الكلي}}{\text{عدد القمصان}}$

ثمن القميص الأبيض الواحد = $\frac{840}{x}$

ب) بحسب المعطيات أيضًا اشترى التاجر 40 قميصًا سودًا

ثمن الواحد مساوٍ لثمن القميص الأبيض , لذلك

ثمن القميص الاسود الواحد هو $\frac{840}{x}$

• بحسب المعطيات باع التاجر القمصان البيضاء بربح 30% على كل قميص وهذا معناه ايضًا انه ربح 30% من القمصان البيضاء وبالتالي نستنتج أنه باع القمصان البيضاء كلها بمبلغ :-

المبلغ الذي باع التاجر القمصان البيضا, $= (100\%+30\%)\cdot 840 = 130\%\cdot 840 = \frac{130}{100}\cdot 840 = \boxed{1092}$

وربح التاجر من القمصان البيضاء هو $\underline{252} = 1092-840$

كذلك باع التاجر القمصان السوداء بربح 25% على كل قميص

اي انه باع القميص الواحد بمبلغ :-

$$(100\%+25\%)\cdot\frac{840}{x} = 125\%\cdot\frac{840}{x} = \frac{125}{100}\cdot\frac{840}{x} = \frac{1050}{x}$$

اذا باع التاجر القميص الواحد الاسود بمبلغ $\frac{1050}{x}$

وبما أن عدد القمصان التي باعها هو 40 قميص اسود

اذا سعر القمصان الكلي الذي باعهم هو

$40\cdot\frac{1050}{x} = \frac{42000}{x} =$ مبلغ بيع القمصان

• بحسب المعطيات باع التاجر القمصان البيضاء والسوداء بمبلغ كلي مقداره 2842 اي يتحقق

مبلغ بيع السوداء + مبلغ بيع البيضاء = 2842

$$\Rightarrow 1092 + \frac{42000}{x} = 2842 \Rightarrow \frac{42000}{x} = 2842-1092$$

$$\frac{42000}{x} = 1750 \xRightarrow{\text{نضرب بـ } x} 42000 = 1750x \Rightarrow \frac{42000}{1750} = x \Rightarrow \boxed{x=24}$$

إذاً عدد القمصان البيضاء التي اشتراها التاجر هو 24.

ب.2

ثمن القميص الابيض هو $\frac{840}{x} \Leftarrow \frac{840}{24} = 35$ شيكل

اذا التاجر دفع مقابل القميص الابيض 35 شيكل
ومقابل القميص الاسود دفع 35 شيكل ايضاً

ج. المبلغ الذي دفعه التاجر مقابل القمصان البيضاء 840 شيكل
المبلغ الذي دفعه التاجر مقابل القمصان السوداء هو:
$40 \cdot 35 = 1400$ شيكل
اذاً المبلغ الكلي الذي اشترى فيه التاجر القمصان
هو $1400 + 840 \longrightarrow 2240$ شيكل

باع التاجر القمصان بمبلغ كلي مقداره 2842

ربح التاجر = مبلغ البيع − مبلغ الشراء $= 2842 - 2240 = 602$

اذاً ربح التاجر مبلغ 602 شيكل من بيع القمصان

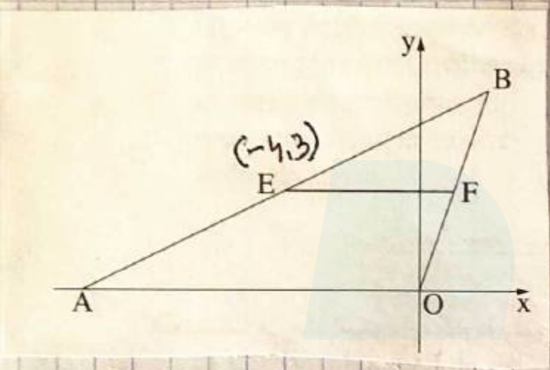
نسبة الربح = $\frac{\text{مبلغ الربح}}{\text{مبلغ الشراء}} = \frac{602}{2240} = 0.26875$

ولكي نجد النسبة المئوية للربح نضرب بـ 100%

$\Longrightarrow 0.26875 \cdot 100\% = \boxed{26.875\%}$
نسبة الربح

السؤال الثاني :

(أ) احداثي y للنقطة A هو صفر لأنها تقع على المحور x . A تقع على AB
لذلك نعوّضه في المستقيم $y=\frac{1}{2}x+5$ ⇐ $y=0$.



$$0=\frac{1}{2}x+5$$

$$-5=\frac{1}{2}x \quad /\cdot 2$$

$$\boxed{x=-10} \Rightarrow \boxed{A(-10,0)}$$

(ب) $E(-4,3)$

حسب قانون منتصف ضلع :

A ——— E ——— B

$(-10,0)$ $(-4,3)$ (x_B,y_B)

$$\boxed{x_E=\frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

$$\frac{x_B-10}{2}=-4 \qquad \frac{y_B+0}{2}=3$$

$$x_B-10=-8 \qquad \boxed{y_B=6}$$

$$\boxed{x_B=2}$$

$$\boxed{B(2,6)}$$

(ج) ميل OB :

$$m_{OB}=\frac{6-0}{2-0}=3$$

$$y=3x+b$$

نعوّض النقطة $O:(0,0)$ في المعادلة ونجد b.

$$0=3\cdot 0+b$$

$$\boxed{y_{OB}=3x} \Leftarrow b=0$$

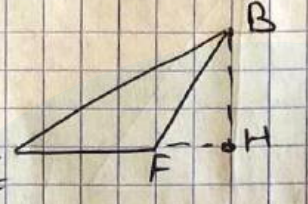
د) $y_E = y_F = 3$ (بما ان EF يوازي المحور x اذاً لـ E و F نفس الاحداثي y)

نعوّضها في معادلة OB $y=3$ ونجد x_F. $\Leftarrow F(x_F, 3)$

$$3 = 3x_F$$
$$x_F = 1 \Rightarrow \boxed{F(1,3)}$$

طول القطعة EF $= |EF| = \sqrt{(3-(3))^2 + (1-(-4))^2} = 5$ وحدات طول.

هـ)



* BH هو ارتفاع المثلث
للنقطة B والنقطة H يوجد نفس الاحداثي x
والنقطة H و F يوجد نفس الاحداثي y. اذاً احداثيات H هي:

$x_H = x_B = 2$

$\Longrightarrow \quad H(2,3) \Leftarrow \quad y_H = y_F = 3$

نجد طول الارتفاع BH بحسب قانون البعد بين نقطتين:

$$|BH| = \sqrt{(3-6)^2 + (2-2)^2} = 3$$

$$S_{\triangle BEF} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \boxed{7.5 \text{ وحدات مساحة}}$$

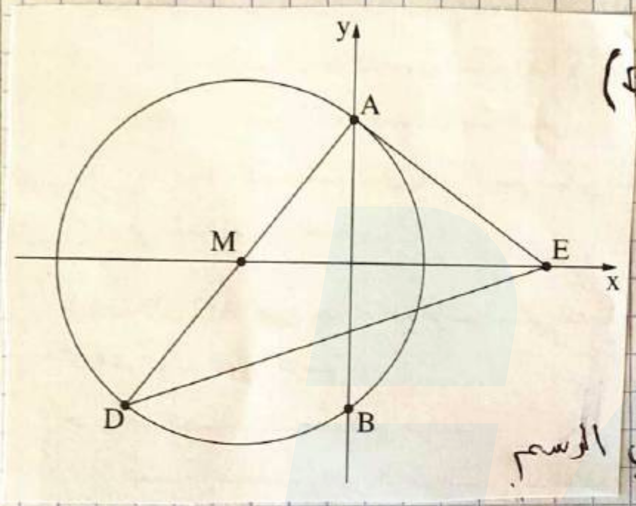
السؤال الثالث :

$(X-m)^2+(y-n)^2=R^2$ معادلة الدائرة العامة , $(X+3)^2+y^2=25$

المركز (m,n)

أ) مركز الدائرة هو $\Leftarrow (-3,0)$ من معادلة الدائرة .

نعوض $X=0$ ونجد احداثي y للنقطة A و B : (نقاط التقاطع مع y)



$$(0+3)^2+y^2=25$$

$$9+y^2=25$$

$$y^2=16$$

$$\boxed{y=\pm 4}$$

$y_A>0$ و $y_B<0$ حسب الرسم

من هنا :

$\boxed{A(0,4)}$, $\boxed{B(0,-4)}$, $\boxed{M(-3,0)}$

ب) ① $A(0,4)$, $M(-3,0)$

الميل لـ MA $= m = \frac{0-(4)}{-3-0} = \boxed{\frac{-4}{-3}} = \boxed{\frac{4}{3}}$

ميل المستقيم MA

② المماس معامد لنصف القطر MA .

حسب نظرية نصف القطر يعامد المماس في نقطة التماس .

من هنا :

$$\frac{4}{3}\cdot(m_A)=-1$$

$$\boxed{m_A=\frac{-3}{4}}$$

ميل المماس

وتقاطع المماس مع محور y هو $(0,4)$ اذاً معادلة المماس :

$$\boxed{y=\frac{-3}{4}x+4}$$

* b هو تقاطع الدالة مع محور y

ج. E هي نقطة تقاطع المماس مع محور x لذلك $E(x_E, 0)$

نعوض 0 = y في معادلة المماس:-

$0 = \frac{-3}{4}x + 4 \Rightarrow +4 = \frac{3}{4}x \Rightarrow +4 \cdot \frac{4}{3} = x$

$\Rightarrow +\frac{16}{3} = x \Rightarrow \boxed{5\frac{1}{3} = x}$

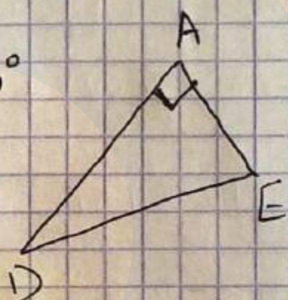
$\boxed{E: (5\frac{1}{3}, 0)}$

طول القطعة AE $= |AE| = \sqrt{(5\frac{1}{3} - 0)^2 + (4-0)^2} = \boxed{6.666}$ 2P.

$\boxed{|AE| = 6.666}$

د. $\angle A = 90°$ لانها الزاوية بين المماس AE والقطر AD

لذلك مساحة المثلث $ADE = \frac{AD \cdot AE}{2}$



$\boxed{AE = 6.666}$

$AD = 2R \rightarrow R = \sqrt{25} = 5$

$AD = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow \boxed{AD = 10}$

مساحة $\triangle ADE$ $S_{\triangle ADE} = \frac{\overset{10}{\overline{10}} \cdot 6.666}{2} = 33.333$ اذا:

وحدة مساحة

السؤال الرابع :

$$f(x) = \frac{12}{x} + 3x + 2$$

(أ) $x \neq 0$.

(ب) $f'(x) = \frac{-12}{x^2} + 3$

$f'(x) = 0$:

$\cdot x^2 / \quad 0 = \frac{-12}{x^2} + 3$

$0 = -12 + 3x^2$

$:3 / \quad 12 = 3x^2$

$4 = x^2 \Rightarrow \pm\sqrt{4} = x$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	/	↘	min	↗

$f'(-3) = \frac{-12}{(-3)^2} + 3 = 1\frac{2}{3}$

$f'(-1) = \frac{-12}{1} + 3 = -9$

$f'(1) = \frac{-12}{1} + 3 = -9$

$f'(3) = \frac{-12}{9} + 3 = 1\frac{2}{3}$

$$f(2) = \frac{12}{2} + 3\cdot 2 + 2 = \underline{14}$$

$$f(-2) = \frac{12}{-2} + 3(-2) + 2 = \underline{-10}$$

$\boxed{(2,14)\ min}$

$\boxed{(-2,10)\ Max}$

ج) من الجدول في البند السابق.

↑ : $\boxed{x<-2}$ أو $\boxed{x>2}$: مجالات تصاعدية

↓ : $\boxed{-2<x<0}$ أو $\boxed{0<x<2}$ مجالات تنازلية

د) ① $f'(x) = -9$ ، نجد احداثي x عن طريق المشتقة :

$$\frac{-12}{x^2} + 3 = -9$$

$$\frac{-12}{x^2} = -12$$

$$1 = x^2$$

$\boxed{x = \pm 1}$ وبما ان النقطة في الربع الاول اي x موجب

$\underline{x = 1}$ احداثي x لنقطة التماس.

تذكر: ميل المماس لدالة في نقطة هو قيمة المشتقة في تلك النقطة

نعوضها في الدالة لنجد احداثي y :

$$\Leftarrow f(1) = \frac{12}{1} + 3 + 2$$

$$f(1) = 17$$

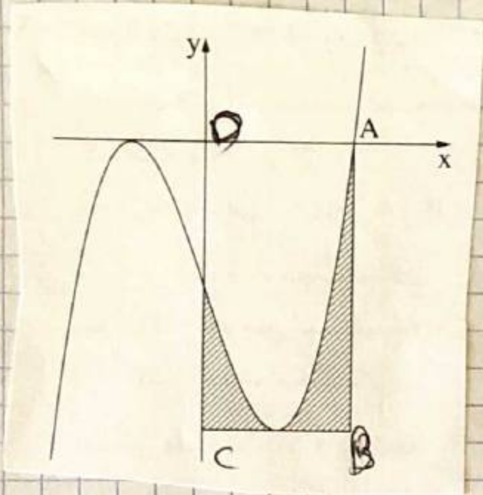
$\Rightarrow \boxed{(1,17)\ \text{نقطة التماس}}$

② $y = -9x + n$ ، نعوض النقطة $(1, 17)$:

$$17 = -9 + n$$

$$n = 26 \Rightarrow \boxed{y = -9x + 26}$$

السؤال الخامس



$$f(x)=x^3-3x-2$$

$$f'(x)=3x^2-3$$ (أ)

$$0=3x^2-3$$

$$1=x^2$$

$$\boxed{x=\pm 1}$$

$f(1)=(1)^3-3\cdot 1-2$

$\boxed{f(1)=-4}$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)-2$

$\boxed{f(-1)=0}$

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

$f'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$

$f'(0)=3\cdot 0-3=-3<0$

$f'(2)=3\cdot 2^2-3=9>0$

$\boxed{(1,-4)\ \text{min}}$

$\boxed{(-1,0)\ \text{max}}$

(ب) $\min(1,-4)$ (نقطة النهاية الصغرى)

$f'(1)=0$

وجدناه في البند السابق.

اي ميل المماس في النقطة $(1,-4)$ هو صفر

اي معادلة المماس:

$\underline{y=-4}$

(جـ) $A(2,0)$.

المساحة المطلوبة هي مساحة المستطيل ABCD ناقص

المساحة المحصورة بين الدالة, المحور X والمحور y والمستقيم صفر

والمستقيم $X=2$.

$S_{ABCD}=|AB|\cdot|DA|=4\cdot2=8$

المساحة بين الدالة $X=2$ و $X=0$ والمحور X

$$=-\int_0^2 f(x)\,dx=-\int_0^2 x^3-3x-2\,dx=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-2x\Big|_0^2\right)$$

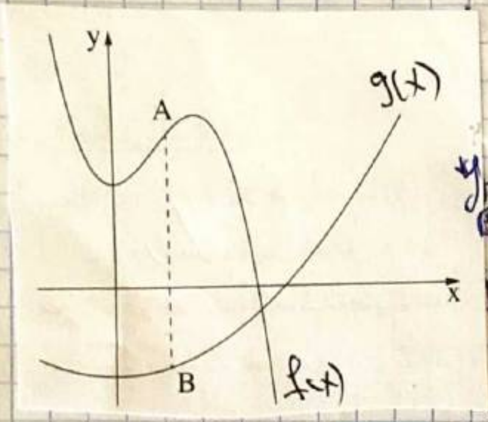
$$\Rightarrow -\left[\left(\frac{2^4}{4}-\frac{3\cdot2^2}{2}-2\cdot2\right)-\left(\frac{0}{4}-\frac{3\cdot0}{2}-0\right)\right]=+6$$

اي المساحة المطلوبة:

$8-6=\boxed{2}$ وحدات مساحة

السؤال السادس :

$$f(x) = -4x^3 + 10x^2 + 14, \quad g(x) = x^2 - 12$$



$$x_A = x_B = x \ (p)$$

$y_B = x^2 - 12$ } $y_A = -4x^3 + 10x^2 + 14$

$B(x, x^2 - 12)$ $\Rightarrow A(x, -4x^3 + 10x^2 + 14)$

طول القطعة

$y_A - y_B = AB$

$$\underbrace{-4x^3 + 10x^2 + 14}_{y_A} - \underbrace{x^2 + 12}_{y_B} = |AB|$$

$$\boxed{|AB| = -4x^3 + 9x^2 + 26}$$

(ب) نعرف $h(x)$ وهي الدالة التي تعبر عن طول القطعة AB

$$h(x) = -4x^3 + 9x^2 + 26$$

$$h'(x) = -12x^2 + 18x$$

$$0 = -12x^2 + 18x$$

$$0 = -6x(2x - 3)$$

$\boxed{x = 0}$

$2x = 3$

$\boxed{x = 1.5}$

	-1 $x<0$	$x=0$	1 $0<x<1.5$	$x=1.5$	2 $x>1.5$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	min	↗	max	↘

$\Rightarrow h'(-1) = -12 - 18 = -$

$h'(1) = -12 + 18 = +$

$h'(2) = -12 \cdot 4 + 36 = -$

أي عندما $\boxed{x = 1.5}$ يوجد لـ AB أكبر طول ممكن.

ج) $g(1.5) = \overset{2.25}{(1.5)^2} - 12$ ⟸ النقطة B تقع على الدالة g

$g(1.5) = -9.75$

أي بعد B عن محور x هو $\underline{\underline{9.75}}$ وحدات.